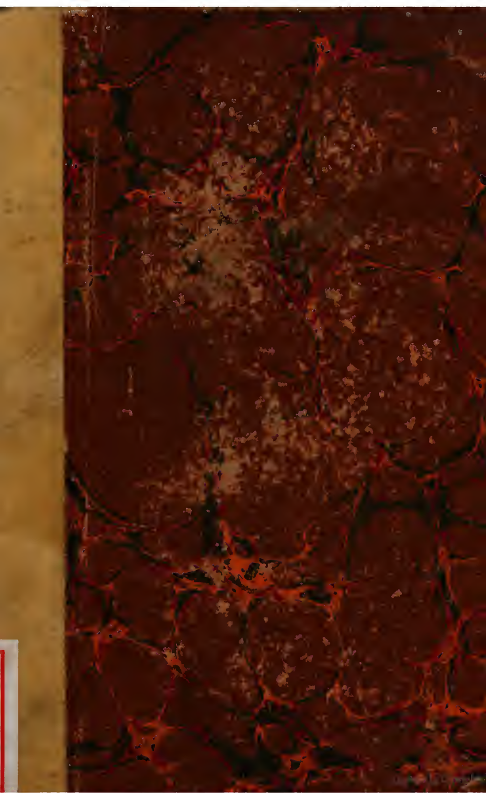




ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines, Professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1860.

AVANT-PROPOS.

Il existe déjà plusieurs Traités très-complets de Calcul Différentiel et Intégral. Mais aucun peut-être n'a été rédigé en vue des personnes, aujourd'hui si nombreuses, que leur carrière appelle à s'occuper de Mathématiques, sans que la science pure devienne toutefois leur destination exclusive. On y expose avec détail des théories peu susceptibles d'application, tandis que les principes y sont par cela même envisagés un peu rapidement.

J'ai cru trouver sous ce rapport un cadre convenable dans le Cours d'Analyse dont je suis chargé depuis plusieurs années à l'École Impériale des Mines. Il est destiné à mettre les Élèves en état de parcourir tout l'enseignement de l'École, et de lire les ouvrages les plus élevés qui s'y rapportent. Le Calcul différentiel et ses applications analytiques, la Géométrie plane et le Calcul intégral proprement dit y sont envisagés d'une manière à peu près aussi complète que dans les Traités dont j'ai parlé; mais la Géométrie de l'espace et la Théorie des équations différentielles n'y sont qu'indiquées et réduites à leurs parties essentielles.

Quant à la méthode à suivre, j'ai dû choisir entre

celles de Leibnitz, de Newton, de Lagrange et la méthode mixte introduite de nos jours. La destination de cet ouvrage ne permettait pas l'hésitation. J'ai adopté le principe des infiniment petits, complété par Carnot. C'est en effet le seul acceptable pour les personnes qui se destinent à l'application; et il est aussi parfaitement convenable au point de vue purement théorique, car il simplifie beaucoup les recherches, et on ne peut se dispenser, dans les parties élevées de la science, d'en revenir tôt ou tard à son emploi. Je me suis efforcé dans l'Introduction de mettre en lumière cette méthode, et de la justifier rigoureusement par le principe de la compensation des erreurs, de manière à obtenir pour ses résultats la même confiance que si on les devait aux méthodes des Anciens.

J'ai terminé ce volume par une série de questions dont je me borne à présenter les énoncés et les résultats. Elles sont destinées à fournir, pour les méthodes générales exposées dans le Cours, des applications qui permettent d'en mieux apprécier la portée.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE II

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE III.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE IV.

CALCUL INTÉGRAL.

EXERCICES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ÉLÉMENTS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

INTRODUCTION.

§ I.

DES FONCTIONS.

1. L'analyse est la partie des Mathématiques qui étudie les relations des grandeurs envisagées en elles-mêmes et indépendamment de l'interprétation concrète qu'on peut leur attribuer. On sait que cette science procède au moyen d'équations qui sont l'expression de l'égalité de deux fonctions. Mais cette notion fondamentale mérite d'être fixée avec soin.

Lorsque deux quantités dépendent l'une de l'autre de telle manière que l'une étant donnée, la valeur de la seconde s'ensuive nécessairement, elles sont dites *fonction* l'une de l'autre. On appelle aussi *variable indépendante* celle qu'on se donne arbitrairement et fonction celle qui s'en déduit.

Si, par exemple, on considère un carré, il présente une certaine superficie; et si on vient à changer la longueur du côté, cette surface variera nécessairement. Il existe entre ces deux éléments une relation qu'on exprime en multi-

pliant par lui-même le nombre x qui représente le côté. Dans cet exemple, le côté est la variable et la surface en est la fonction. On la représente par x^2 et on l'appelle pour cette raison le carré de x.

Autre exemple : Si on prend une longueur égale à l'unité inclinée sous un certain angle x, elle aura une projection horizontale qui changera nécessairement avec cet angle. Ici l'inclinaison est la variable, et la projection en est la fonction qu'on exprime par $\cos x$.

On appelle par opposition des *constantes* les quantités qui ne changent pas quand la variable prend diverses valeurs. Si, par exemple, on projette un cercle sur un plan oblique, on obtient une ellipse dont le petit axe varie avec l'inclinaison respective des deux plans, mais dont le grand axe reste toujours le même et égal au diamètre du cercle. Dans cet exemple l'angle des plans est la variable, le petit axe en est fonction et le grand axe est une constante.

2. Le nombre des fonctions est nécessairement illimité, comme celui des questions qu'on peut se proposer. Mais lorsqu'on a la moindre habitude du calcul, on y voit constamment reparaître des éléments toujours les mêmes, tels que des logarithmes, des sinus, des radicaux, etc., à l'aide desquels sont formées les autres fonctions. Ces éléments sont appelés *fonctions simples* par opposition aux *fonctions complexes* qu'ils servent à composer. Le nombre des premières est essentiellement limité et même très-restreint. Il y a par suite intérêt à en présenter la nomenclature.

Je désignerai pour cela par x la variable, par y la fonction et par m une constante dont la valeur reste indéterminée. Les fonctions simples sont au nombre de dix et peuvent se grouper de la manière suivante :

1	Somme	$m + x$ [1]
	Différence	$m - x$
2	Produit	mx
	Rapport	$\frac{m}{x}$
3	Puissance	x^m
	Racine	$\sqrt[m]{x}$
4	Exponentielle	e^x [2]
	Logarithme	Lx [3]
5	Fonction trigonometrique	$\sin x$ [4]
	Fonction circulaire	$\text{arc} \sin x$ [5].

Il existe d'autres signes de fonctions en usage dans l'analyse. Mais on peut les ramener aux précédents par les formules suivantes [6]

$$m^x = e^{x L m}, \qquad \log x = \log e .\ Lx,$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \qquad \text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin x,$$

$$\tan g x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \qquad \text{arc} \tan g x = \text{arc} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right).$$

---

(1) Les six premières fonctions sont souvent appelées *algébriques*, et les quatre autres *transcendantes*.

(2) e désigne non pas une constante quelconque, mais la base du système népérien dont la valeur est 2,71828182846.....

(3) La caractéristique L se rapporte aux logarithmes népériens. Les logarithmes à base quelconque seront désignés, comme à l'ordinaire, par l'abréviation log.

(4) Le sinus est pris ici dans le cercle de rayon égal à l'unité et non pas, comme pour les calculs numériques, à 10^{10}.

(5) L'arc qu'on donne par son sinus a, comme on sait, une infinité et même deux séries infinies de valeurs; mais nous le réduisons ici à la valeur unique que l'on trouve toujours dans le premier quadrant soit positif, soit négatif.

(6) De ces formules celles de la première ligne sont connues par l'algèbre et celles de la première colonne par la trigonometrie. Quant aux autres, elles

$$\cot x = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}, \qquad \text{arc}\cot x = \text{arc}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}, \qquad \text{arc}\sec x = \text{arc}\sin\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right),$$

$$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}, \qquad \text{arc coséc}\, x = \text{arc}\sin\frac{1}{x}.$$

Nous rangerons donc ces expressions dans les fonctions complexes, afin de réduire au moindre nombre possible les éléments simples que nous aurons à étudier directement.

3. Il y a toujours à l'occasion d'une fonction deux questions distinctes à envisager : son *évaluation numérique* lorsque la quantité dont elle dépend est donnée en nombres et son *calcul analytique* quand cette quantité reste indéterminée et représentée par une lettre.

Le calcul numérique s'effectue soit par de véritables opérations arithmétiques, telles que la multiplication, la division, l'extraction des racines, etc., soit au moyen de tables construites une fois pour toutes lorsque le procédé d'évaluation directe est par trop laborieux, comme pour les logarithmes, les sinus naturels, etc. Cette théorie reste essentiellement bornée à dix opérations distinctes qui correspondent aux dix fonctions simples. Car quelque compliquée que soit une fonction, elle ne donnera

---

se justifient toutes de la même manière, et je me contenterai de prendre pour exemple arc tang x.

Quand on connaît la tangente d'un arc, son sinus s'exprime par $\frac{\text{tang}^2}{\sqrt{1+\text{tang}^2}}$. Or la tangente de l'arc dont il s'agit est x. Le sinus est donc $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, et par suite, au lieu de désigner cet arc par sa tangente sous la forme arc tang x, on peut le donner par son sinus en écrivant arc sin $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

lieu qu'à l'application successive des règles en question. Par exemple, pour évaluer $\log \sin \sqrt{x}$, on calculera d'abord la racine y de x, puis le sinus z de y, et enfin le logarithme u de z. u sera la valeur cherchée.

Il n'en est pas de même du calcul analytique. Ses procédés sont variés à l'infini et chaque fonction devrait avoir en quelque sorte sa théorie. Un pareil travail n'a pu être effectué ou même ébauché que pour les plus simples et les plus importantes. Il comprend les calculs algébrique, logarithmique et trigonométrique, qui constituent l'*analyse ordinaire* et dont les procédés sont essentiellement spéciaux.

Nous avons à nous occuper ici de l'analyse dite *transcendante* ou *infinitésimale*, dont les opérations offrent au contraire un caractère d'entière généralité. Cette analyse est la mise en pratique d'une méthode fondamentale qu'on appelle de même infinitésimale, et qu'il faut commencer par faire connaître ([1]).

§ II.

MÉTHODE INFINITÉSIMALE.

4. Pour être mieux compris, je prendrai d'abord un exemple. Je supposerai qu'on veuille mener une tangente à la parabole, qui a pour équation

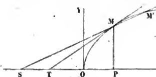
$$y^2 = 2px,$$

en un point M, dont les coordonnées soient x', y'. J'appelle tangente dans ce cas particulier une droite qui passe par le point M en laissant toute la courbe d'un même côté.

([1]) Cette explication est d'une grande importance et en même temps assez délicate. Si l'on éprouvait quelque difficulté à en bien saisir tous les détails au premier abord, le mieux serait peut-être de passer de suite aux applications. A une seconde lecture les difficultés auraient disparu.

Si l'on proposait cette question à une personne complétement étrangère aux connaissances les plus répandues à ce sujet, sa première idée serait sans doute de recourir à une approximation, sauf à la rendre la plus parfaite possible et à en déduire même ultérieurement une solution rigoureuse, si cela est possible. On prendra pour cela sur la courbe un autre point M′ dont je désignerai les coordonnées par $x + \alpha$ et $y + \beta$. Si nous joignons ces deux points par une ligne droite SMM′, ce ne sera certainement pas la tan-

Fig. 1.



gente, puisque celle-ci doit laisser toute la courbe d'un même côté, et que la droite en question laisse au-dessus d'elle l'arc MM′. Mais il dépend de nous de faire que cet arc soit petit et par suite que la droite qui vient d'être tracée diffère peu de la tangente. Il suffit pour cela de prendre le point M′ voisin du point M, c'est-à-dire α et β petits. Or rien ne nous en empêche. Si donc nous nous résignons jusqu'à nouvel ordre à nous contenter d'une approximation que nous sommes en état de rendre aussi parfaite qu'on pourra le désirer, nous pourrons considérer SMM′ comme la tangente. Adoptons cette manière de voir et poursuivons.

La droite que nous traçons ainsi par les points x', y' et $x' + \alpha$, $y' + \beta$ aura pour équation

$$y - y' = \frac{\beta}{\alpha}(x - x');$$

mais il est nécessaire d'exprimer que ces deux points ont

été pris sur la courbe, ce qui se fera par les relations

$$y'^2 = 2px',$$
$$(y' + \beta)^2 = 2p(x' + \alpha).$$

En développant la seconde et retranchant la première, il reste

$$2\beta y' + \beta^2 = 2p\alpha,$$
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2p}{2y' + \beta},$$

et par cette substitution l'équation de la droite devient

$$y - y' = \frac{2p}{2y' + \beta}(x - x').$$

Si pour la construire aisément nous cherchons le point S où elle rencontre l'axe de la courbe, il suffira de faire $y = 0$ et de remplacer x par l'abscisse x_0 de ce point. On trouve ainsi

$$x_0 = x' - \frac{2y' + \beta}{2p}y'.$$

Je ferai maintenant le raisonnement suivant : Ce n'est qu'au prix d'une certaine erreur que nous pouvons considérer cette expression comme déterminant la tangente; et pour que cette approximation soit admissible, il faut que β soit une petite quantité. Mais alors on peut encore négliger β dans la dernière relation vis-à-vis de $2y'$ qui a une valeur fixe. Par là on commet certainement une nouvelle erreur. Mais d'abord il est moins grave de combiner une seconde faute avec une première que d'abandonner par cette première inexactitude le terrain de la rigueur. De plus, il est possible que cette nouvelle erreur atténue la première en nous rapprochant de la vérité. Enfin nous courons la chance qu'elle la compense tout juste, en rétablissant l'exactitude que nous avions dû abandonner momentanément.

A la vérité, cette chance peut paraître peu probable à priori, et cependant il est facile de reconnaître que c'est précisément ce qui arrive; car si nous négligeons β, il vient

$$x_0 = x' - \frac{y'^2}{p} = x' - 2x' = -x',$$

ce qui nous indique que l'intersection de la droite avec l'axe est symétrique du pied P de l'ordonnée par rapport au sommet O; et chacun sait que telle est dans la parabole la construction rigoureuse de la tangente.

5. Ainsi donc on voit que la méthode que nous venons d'employer, qui semblait ne nous promettre, dans le principe, qu'une approximation plus ou moins satisfaisante, s'est trouvée redressée, justement par ce qui semblait devoir la fausser encore davantage, par une espèce de faute de calcul, et nous a conduits très-directement au résultat rigoureux.

A la vérité, nous n'avons été avertis dans le cas actuel que les erreurs s'étaient mutuellement redressées, qu'en nous reportant à des notions préalablement acquises. Mais je vais maintenant formuler la méthode d'une manière générale, et j'y joindrai ce qui est tout à fait indispensable, un symptôme sûr et clair auquel on puisse reconnaître que la compensation des erreurs a été effectuée. De sorte que le résultat ainsi obtenu sera aussi rigoureux et méritera une confiance aussi entière que si on le devait aux démonstrations ordinaires.

6. La méthode infinitésimale consiste dans les opérations suivantes ; On introduit dans l'étude de la question, outre les quantités qui y figurent naturellement, données ou inconnues, variables ou constantes, d'autres éléments qu'on peut se donner arbitrairement et faire décroître

au-dessous de toute limite assignable, en approchant de zéro autant qu'on le voudra. On les appelle des *infiniment petits.* Ils ne sont pas seulement petits, mais arbitraires, et on reste à chaque instant le maître d'abaisser encore leur degré de grandeur si on le juge à propos. On en a eu tout à l'heure un exemple dans α et β, car rien n'assignait la distance du point M' au point M, et elle est restée jusqu'à la fin à notre disposition.

On pose des équations entre tous ces éléments en se donnant (c'est le point important) la faculté de négliger les infiniment petits partout où ils se trouvent devant des quantités finies. Il est évident qu'il résultera de cette manière de faire une grande simplification. Il ne faut pas se dissimuler non plus que l'équation ainsi obtenue sera entachée d'une erreur. Mais celle-ci est telle, que nous pouvons l'atténuer à volonté, puisqu'elle dépend de quantités que nous pouvons faire décroître autant que nous le voudrons. La relation est donc inexacte, mais aussi près d'être exacte qu'on peut le désirer. Nous distinguerons avec Carnot cet état sous le nom d'équations *imparfaites*, par opposition aux équations *fausses* qui seraient troublées par une erreur fixe, grande ou petite.

On se sert alors des relations ainsi obtenues en leur faisant subir les transformations convenables dans chaque cas particulier, et en continuant à négliger, s'il y a lieu, les infiniment petits devant les quantités finies. On conçoit fort bien, comme nous en avons eu un exemple, qu'il puisse arriver telle dernière erreur qui compense tout juste toutes celles qui ont été commises avant elle, et qui corrige ainsi l'équation de ce qui lui manque pour être exacte.

7. Or je dis que cela arrivera nécessairement si on parvient, n'importe par quel moyen, à faire disparaître tous les infiniment petits. Et tel est le symptôme dont j'avais parlé.

En effet, il arrivera nécessairement de trois choses l'une : ou l'équation est exacte, ou elle est imparfaite, ou elle est fausse.

Or, d'une part, l'équation ne peut être fausse, car nous n'avons jamais rien négligé de fini, mais seulement des quantités qui restent à notre disposition et dont la combinaison ne peut former une erreur qui n'y soit pas, ce qui serait le caractère d'une équation fausse.

Elle n'est pas non plus imparfaite, car cela voudrait dire qu'elle est entachée d'une erreur dont nous restons maîtres. Or notre seul moyen d'action pour la faire varier consisterait à disposer des infiniment petits ; mais par hypothèse, l'équation n'en contient plus, nous n'avons donc plus par là aucune prise sur elle.

Puisque l'équation n'est ni fausse ni imparfaite, il s'ensuit qu'elle est rigoureusement exacte.

8. Je ne quitterai pas ce sujet sans insister un instant sur la singularité d'une méthode qui emploie l'erreur pour parvenir à la connaissance de la vérité, et qui côtoie, pour ainsi dire, la vraie route, en la quittant pourtant dès le début pour n'y rentrer qu'au dernier moment, mais avec la certitude d'arriver au but.

Si cette manière de faire pouvait paraître par trop bizarre, remarquons qu'elle l'est au fond beaucoup moins que celle qui emploie comme intermédiaires les quantités imaginaires. Car alors on ne peut pas à un moment donné traduire les équations en langage ordinaire et dire au juste où en est la question. Tandis qu'une équation imparfaite est toujours une relation claire et facile à comprendre, dont la seule particularité est d'être un peu différente de celle que l'on devrait avoir en réalité. Ainsi le parallèle est complet : comme intermédiaires, les imaginaires et les infiniment petits sont parfaitement admissibles ; mais si l'on

ne parvient pas à en dégager le résultat, la question ne peut être considérée comme complétement résolue, car dans le premier cas le résultat est impossible à interpréter, et dans le second il est à côté du vrai.

Telle est la véritable idée qu'il faut se faire de la méthode infinitésimale ; et on se méprendrait étrangement sur sa nature en considérant les infiniment petits comme des quantités d'une petitesse telle, qu'il est sans intérêt d'en tenir compte, et qu'on peut les négliger, suivant une expression qu'on prête à Leibnitz, « comme un grain de sable vis-à-vis de la » masse de la terre ». Cela réduirait cette méthode si remarquable à n'être plus qu'un calcul d'approximation, plus ou moins parfait, suivant que les quantités négligées seraient d'un ordre plus ou moins élevé, mais nécessairement erroné. Tandis que le fait d'être non pas très-petits à un degré déterminé, mais indéfiniment décroissants, c'est-à-dire arbitraires, nous fournit un moyen très-simple, comme on vient de le voir, de nous délivrer définitivement de toute inexactitude.

9. Pour compléter ces notions, il faut encore expliquer ce qu'on entend par les *différents ordres* d'infiniment petits.

Si l'on prend le rapport de deux de ces quantités, il peut arriver d'abord qu'il soit fini, car la valeur d'une fraction ne dépend nullement de l'ordre de grandeur de ses termes. Dans ce cas, les infiniment petits sont dits du même ordre. Si le rapport est lui-même infiniment petit, le numérateur est dit d'un ordre supérieur au dénominateur ou encore infiniment petit par rapport à celui-ci.

Par exemple, soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des infiniment petits du premier ordre. Les quantités $\alpha^2, \alpha\beta, \ldots$ seront appelées du second ordre, parce que leurs rapports à l'une des premières α sont $\alpha, \beta, \ldots$, c'est-à-dire du premier. De même

α^3, $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta\gamma$,... seront du troisième ordre, parce que leurs rapports à une quantité du second, α^2 sont α, β, $\frac{\beta}{\alpha}\gamma$,..., c'est-à-dire du premier ordre. Au contraire, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ sera du premier, parce que son rapport à α est $\frac{\alpha}{\beta}$ quantité finie.

Sans insister davantage, on voit que l'ordre infinitésimal s'estime comme l'ordre d'homogénéité; lorsqu'on veut reconnaître, par exemple, si une expression géométrique représente une longueur, une surface ou un volume.

10. Cela posé, pour compléter la méthode infinitésimale, on doit négliger les infiniment petits d'ordre supérieur vis-à-vis ceux d'ordre inférieur.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que l'ordre le moins élevé des infiniment petits qui entrent dans une équation soit n. Divisons tout par α^n, α étant du premier ordre. Les termes de l'ordre n deviennent finis, puisque nous les rapportons à une quantité du même ordre. Tous les autres restent infiniment petits du premier, du second, du troisième... ordres. Dans cet état de choses, nous sommes autorisés par ce qui précède à négliger toute la partie infinitésimale devant les termes finis. Si maintenant nous supprimons le facteur $\frac{1}{\alpha^n}$, nous retrouvons l'équation telle qu'elle était, mais débarrassée des infiniment petits d'ordre supérieur. Ainsi donc l'énoncé de la méthode doit être modifié de la manière suivante :

Négliger constamment les infiniment petits d'ordre supérieur devant ceux d'ordre inférieur, et bien se garder d'en négliger vis-à-vis de ceux du même ordre. Puis diriger tout le calcul vers l'élimination complète des infiniment petits.

§ III.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

11. Nous voyons à présent ce que nous avons à faire tout d'abord pour nous mettre en état d'appliquer avec facilité la méthode infinitésimale. C'est d'arriver à connaître, pour toutes les fonctions possibles, la quantité dont elles varient lorsque la variable subit un accroissement infiniment petit, cette quantité étant débarrassée une fois pour toutes de la partie qu'on peut y négliger.

Cet accroissement imparfait de la fonction est appelé *différentielle*. Sa recherche forme la *différentiation* et donne lieu au *calcul différentiel*. On nomme aussi différentielle, l'accroissement exact de la variable indépendante. On les désigne indistinctement par la caractéristique d. Ainsi on écrit dx, da, $d\alpha$, dP,... pour les différentielles de x, a, α, P,....

On emploie encore une autre notation qu'il est bon de connaître. Pour exprimer que y est fonction de x, on écrit

$$y = f(x).$$

Si on prend dans cette équation dy en fonction de x et de dx, le rapport $\frac{dy}{dx}$ sera une quantité finie, car la fonction et sa variable reçoivent en général des accroissements du même ordre. En effet, si dy était constamment d'ordre inférieur à dx, c'est-à-dire négligeable devant lui, y ne subirait aucune variation et ne serait plus dès lors une fonction de x, ce qui est contre l'hypothèse. On pourra donc négliger dx partout où il figurera dans ce rapport, puisqu'il s'y trouvera nécessairement des termes finis. La nouvelle fonction de x seul ainsi obtenue est appelée la *fonction dérivée* ou simplement la *dérivée* de la première.

On l'indique avec un accent et on l'énonce *fonction prime* de x,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)\,dx. \tag{1}$$

Le problème est maintenant posé. Mais comme le nombre des fonctions est illimité, il est naturel de procéder du simple au composé et de considérer d'abord les fonctions simples. De là dix questions particulières d'analyse qui sont la base de toute la théorie. Nous verrons ensuite par quelles formules générales on peut y ramener tous les autres cas.

LIVRE I.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS SIMPLES.

12. Si y désigne une fonction de x représentée par

$$y=f(x),$$

lorsqu'on donnera à x l'accroissement dx, la fonction deviendra $f(x+dx)$ et aura reçu l'accroissement $f(x+dx)-f(x)$. On aura donc pour la différentielle de y

$$dy=f(x+dx)-f(x),$$

sauf à simplifier dans chaque cas cette expression en y supprimant la partie négligeable. C'est ce que nous allons faire successivement pour les diverses fonctions simples.

Somme. — On a pour la somme

$$y=m+x,$$
$$dy=[m+(x+dx)]-[m+x]=dx.$$

Différence. — On a pour la différence

$$y=m-x,$$
$$dy=[m-(x+dx)]-[m-x]=-dx.$$

Le signe — de la différentielle de y indique que cette fonction subit, à proprement parler, une diminution lorsque la variable reçoit une augmentation.

C'est là évidemment un fait général. Suivant que la fonction est croissante ou décroissante quand la variable augmente, leurs différentielles sont de même signe ou de signes contraires, ce qui revient à dire que la dérivée est positive ou négative.

Produit. — On a pour le produit

$$y = mx,$$
$$dy = m(x + dx) - mx = mdx.$$

Jusqu'ici nous n'avons rien eu à négliger, c'est-à-dire que les formules seraient encore exactes pour des accroissements finis. Il n'en sera plus de même des suivantes.

Rapport. — Si on prend le rapport

$$y = \frac{m}{x},$$
$$dy = \frac{m}{x + dx} - \frac{m}{x} = \frac{-mdx}{x(x + dx)},$$

comme dx se trouve au dénominateur devant x, on peut l'y négliger et il reste

$$dy = -\frac{mdx}{x^2}.$$

13. *Puissance et racine.* — On sait par l'algèbre que ces deux fonctions n'en font, à proprement parler, qu'une seule, lorsqu'on regarde l'exposant comme susceptible de recevoir toutes espèces de valeurs. Je distinguerai, à ce sujet, plusieurs cas :

1°. Exposant entier et positif. — Prenons

$$y = x^m,$$
$$dy = (x + dx)^m - x^m.$$

Lorsqu'on forme les puissances successives de $x + a$, on reconnaît à leur seule inspection que le premier terme est

pour la $m^{ième}$, x^m, le second $mx^{m-1}a$, et que tous les autres renferment en facteur a^2, a^3, ... Nous pouvons donc écrire ([1])

$$(x+dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + A\,dx^2 + B\,dx^3 + \ldots.$$

Si on fait passer x^m dans le premier membre, il viendra, d'après l'équation précédente,

$$dy = mx^{m-1}dx + A\,dx^2 + B\,dx^3 + \ldots,$$

et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$dy = mx^{m-1}dx.$$

2°. Exposant entier et négatif. — Désignons par n un nombre entier et positif, et posons

$$y = x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}:$$

on en tire

$$\frac{1}{y} = x^n.$$

Cette relation a constamment lieu entre x et y. Elle est encore vraie, par conséquent, pour des valeurs infiniment voisines. Si donc les deux membres qui sont actuellement égaux ne cessent pas alors de l'être, c'est qu'ils reçoivent des accroissements égaux. Substituant à ceux-ci les différentielles, nous pouvons de l'égalité des deux membres déduire celle de leurs différentielles. C'est là un fait général, et lorsqu'une équation a lieu pour toutes les valeurs de la

([1]) On remarquera que nous n'invoquons pas ici la théorie des combinaisons. De sorte que la formule du binôme de Newton que nous déduirons plus tard du calcul différentiel et pour un exposant quelconque se trouvera établie sans le secours de cette théorie, qui pourrait en quelque sorte s'en déduire inversement.

variable, on peut en déduire l'égalité des différentielles de ses deux membres : c'est ce qu'on appelle *différentier l'équation*.

Or ici nous connaissons les différentielles des deux membres. Car $\frac{1}{y}$ est un rapport et x^n une puissance entière et positive. Il vient ainsi (12)

$$-\frac{dy}{y^2} = nx^{n-1}\,dx;$$

d'où on tire

$$dy = -ny^2x^{n-1}\,dx = -nx^{-2n}x^{n-1}\,dx = -nx^{-2n+n-1}\,dx$$
$$= -nx^{-n-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx.$$

Nous retrouvons donc, pour ce second cas, la même formule que pour le premier.

3°. Exposant fractionnaire. — Je désigne par p et q deux nombres entiers positifs ou négatifs, et je pose

$$y = x^m = x^{\frac{p}{q}}.$$

En élevant les deux membres à la puissance q,

$$y^q = x^p.$$

Nous sommes, comme toujours, en droit de différentier cette équation, et de plus en état de le faire, car les deux puissances sont entières et la règle est maintenant indépendante du signe de l'exposant. Il vient par là

$$qy^{q-1}\,dy = px^{p-1}\,dx.$$

On en tire

$$dy = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\,dx = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}\,dx$$
$$= \frac{p}{q}\,x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)}\,dx = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx.$$

La règle convient donc à toutes les valeurs de l'exposant.

Si, au lieu de la différentielle, nous cherchons la dérivée, il vient

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

et, par suite, la dérivée d'une puissance s'obtient en multipliant par l'exposant et diminuant celui-ci d'une unité.

Exemple. — Appliquons, en particulier, à la racine carrée

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

$$dy = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

de là cette règle spéciale. La différentielle d'une racine carrée s'obtient en divisant la différentielle de la quantité soumise au radical par le double du radical.

14. *Exponentielle.* — Prenons maintenant l'exponentielle

$$y = e^x,$$

$$dy = e^{x+dx} - e^x = e^x e^{dx} - e^x = e^x (e^{dx} - 1).$$

Je considère à part la parenthèse

$$e^{dx} - 1 = \alpha.$$

On déduit de là

$$e^{dx} = 1 + \alpha;$$

puis, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$dx = L(1 + \alpha),$$

et en divisant membre à membre,

$$\frac{dx}{e^{dx}-1}=\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}=L\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Or dx est infiniment petit, c'est-à-dire infiniment près de zéro, par suite e^{dx} l'est de e^0 ou de l'unité, et enfin $e^{dx}-1$ de zéro. Donc α est infiniment petit et on peut le considérer comme tendant constamment vers zéro. Dans ces conditions, la théorie ordinaire des logarithmes enseigne que l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a une valeur finie qui est précisément égale à e, et qui forme la base du système népérien. On a donc simplement

$$\frac{dx}{e^{dx}-1}=Le=1,$$

$$e^{dx}-1=dx,$$

et, par suite,

$$dy=e^x.dx.$$

Si, au lieu de la différentielle, on prend la dérivée

$$\frac{dy}{dx}=e^x,$$

on obtient cette règle très-simple : L'exponentielle est elle-même sa propre dérivée.

Logarithme. — Si l'on pose

$$y=Lx,$$

on en déduit, en prenant l'exponentielle des deux membres,

$$e^y=e^{Lx}=x;$$

différentiant cette équation d'après la règle précédente :

$$e^y.dy=dx,$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{e^y} = \frac{dx}{x}.$$

15. *Fonction trigonométrique.* — On a pour le sinus

$$y = \sin x,$$

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x = \cos x \sin dx + \sin x \cos dx - \sin x$$

Or dans le premier terme $\sin dx$ peut être remplacé par dx, car le cercle étant normal à son rayon, l'élément d'arc dx considéré comme rectiligne sauf des infiniment petits d'ordre supérieur se confond avec son sinus. Pour cette raison $\cos dx$, qui n'est autre que $\sqrt{1 - \sin^2 dx}$, peut être remplacé par $\sqrt{1 - dx^2}$ ou par l'unité. Alors les deux derniers termes se détruisent et il reste

$$dy = \cos x . dx.$$

Si on prend la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

La dérivée du sinus est le cosinus.

Fonction circulaire. — Si on pose

$$y = \operatorname{arc} \sin x,$$

on en déduit, en prenant le sinus des deux membres,

$$\sin y = \sin(\operatorname{arc} \sin x) = x,$$

et en différentiant d'après la règle précédente :

$$\cos y . dy = dx,$$

$$dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Il reste à nous fixer sur le signe de cette différentielle,

ou à savoir (12) si la fonction croît ou non en même temps que sa variable. Or d'après nos conventions (2, note 5) la fonction circulaire se rapportant à l'arc du premier quadrant positif ou négatif, varie dans le même sens que la variable et a par suite une dérivée positive. La formule est donc

$$dy = \frac{+dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$



CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS.

§ I.

RÈGLE GÉNÉRALE.

16. L'artifice qui sert à former toutes les fonctions possibles à l'aide des précédentes est très-simple. Il consiste à remplacer les lettres dont elles dépendent par d'autres fonctions simples ou en particulier par la même, et à répéter au besoin plusieurs fois cette opération. Par exemple, si dans Lx on change x en $\sin x$, on forme la fonction complexe $L\sin x$. Si on remplace encore x par $\sqrt{x}$, on obtient $L\sin\sqrt{x}$, et ainsi de suite.

Les fonctions complexes se rangent d'après cela en deux catégories distinctes, suivant qu'on ne remplace que x ou bien à la fois m et x. Les premières sont appelées *fonctions de fonctions* et les autres *fonctions composées*. Nous nous occuperons d'abord des fonctions de fonctions.

17. Je supposerai une expression formée par la superposition de quatre fonctions simples seulement. Mais il sera facile de voir que la méthode suivie est tout à fait générale. Soit donc

$$y = \mathrm{F}\{f[\varphi(\psi x)]\},$$

$\mathrm{F}, f, \varphi, \psi$ désignant des fonctions simples, c'est-à-dire de celles que nous savons différentier ou dont nous connaissons les dérivées $\mathrm{F}', f', \varphi', \psi'$.

Si F, au lieu de porter sur une expression compliquée, dépendait directement de la variable, la difficulté disparaitrait. Or rien ne nous empêche d'introduire une variable auxiliaire u qui désigne la quantité subordonnée à F,

$$u = f[\varphi(\psi x)],$$

alors y prend la forme

$$y = F(u),$$

et devient fonction simple de u, tandis qu'il était fonction complexe de x. Nous saurons donc différentier sous la forme (1 p. 14)

$$dy = F'(u)\,du,$$

ou, en rendant à u sa valeur,

$$dy = F'\{f[\varphi(\psi x)]\}.du.$$

Le premier facteur est entièrement déterminé, puisque nous connaissons F'. Il reste donc à trouver du; c'est-à-dire que nous sommes encore ramenés à différentier une fonction de fonction. Mais la question a évidemment fait un pas, car u n'est formé que de trois fonctions simples, au lieu de quatre.

Raisonnant de même, nous sommes conduits à représenter par une nouvelle variable auxiliaire v la quantité dont dépend f,

$$v = \varphi(\psi x),$$

u devient alors

$$u = f(v),$$

d'où, en différentiant,

$$du = f'(v)\,dv,$$

c'est-à-dire

$$du = f'[\varphi(\psi x)].dv.$$

Nous sommes de nouveau ramenés à connaître dv.

Pour cela je pose encore

$$w = \psi x,$$

et il vient

$$v = \varphi(w),$$

$$dv = \varphi'(w)\,dw = \varphi'(\psi x).\,dw.$$

Quant à dw, nous l'obtenons directement, parce que nous sommes enfin arrivés à une fonction simple de x,

$$dw = \psi' x\,.\,dx.$$

Si maintenant nous substituons successivement les valeurs trouvées, il viendra

$$dy = \mathrm{F}'\{f[\varphi(\psi x)]\}.f'[\varphi(\psi x)].\varphi'(\psi x).\psi' x.\,dx.$$

On voit par là que, pour avoir la dérivée d'une fonction de fonction, il faut prendre la dérivée de la première fonction composante et la faire porter sur tout ce dont dépendait cette fonction primitive, puis multiplier par la dérivée de la seconde fonction composante portant sur la quantité subordonnée à cette seconde fonction primitive, et ainsi de suite jusqu'à la dernière fonction simple composante dont la dérivée forme le dernier facteur du produit.

On remarquera l'analogie de cette opération avec l'évaluation numérique (3) qui ne comporte que la répétition de dix règles toujours les mêmes.

§ II.

EXEMPLES.

18. Il est bon, lorsqu'on n'a pas encore l'habitude de la différentiation, de traiter les premiers exemples avec tout le développement de calcul que nous venons d'indiquer,

sauf à s'affranchir plus tard de ces longueurs. C'est ce que je ferai ici.

Exemple I. — Prenons (2)

$$y = \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x.$$

Je pose

$$u = \text{arc}\sin x;$$

d'où

$$y = \frac{\pi}{2} - u;$$

différentiant (12),

$$dy = -du;$$

on a ensuite (15)

$$du = \frac{+dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On obtient donc la même différentielle pour les deux fonctions arc sin x et arc cos x; le signe seul les distingue l'une de l'autre. Ce fait s'explique naturellement en ce que leur somme étant constante et égale au quadrant, l'une doit diminuer de la quantité dont l'autre augmente.

Exemple II. — Soit maintenant (2)

$$y = \log x = \log e.\ Lx,$$

$$u = Lx,$$

$$y = u.\log e,$$

$$dy = du.\log e,$$

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$dy = \frac{dx}{x}\log e.$$

Il ne faut jamais oublier dans la différentiation d'un logarithme ce facteur log e qu'on appelle le *module* du système et qui n'est l'unité que pour les logarithmes népériens. Sa valeur est pour le système décimal : 0,43429448....

Exemple III. — Soit de même (2)

$$y = m^x = e^{xLm},$$
$$u = xLm,$$
$$y = e^u,$$
$$dy = e^u\,du = e^{xLm}.\,du = m^x.\,du,$$
$$du = dx\,Lm,$$
$$dy = m^x.\,Lm.\,dx.$$

Il ne faut non plus jamais omettre dans la différentiation d'une exponentielle à base quelconque de mettre en facteur le logarithme népérien de cette base.

19. Exemple IV. — Prenons encore (2)

$$y = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Nous poserons d'abord (13)

$$u = 1 - \sin^2 x,$$
$$y = \sqrt{u},$$
$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{du}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{du}{2\cos x}.$$

ensuite (12)

$$v = \sin^2 x,$$
$$u = 1 - v,$$
$$du = -dv;$$

en troisième lieu (13),

$$w = \sin x,$$
$$v = w^2,$$
$$dv = 2w\,dw = 2\sin x.\,dw;$$

enfin nous aurons directement (15)

$$dw = \cos x dx;$$

puis, en substituant de proche en proche,

$$(2) \qquad dy = \frac{1}{2\cos x} \cdot (-1) . 2 \sin x . \cos x dx,$$

et, en simplifiant,

$$dy = -\sin x dx.$$

Si l'on éprouvait quelque scrupule pour le signe, à cause du radical que nous avons introduit, il suffirait de remarquer que le cosinus étant une fonction décroissante, sa différentielle doit bien être négative.

On voit par cet exemple comment une fonction fort simple peut engager dans des calculs extrêmement prolixes dont il importe de nous dégager dorénavant. On raisonne pour cela directement de la manière suivante : y se trouve donné par un radical carré $\sqrt{1-\sin^2 x}$ dont on obtiendra la différentielle (13) en divisant par le double du radical $\left(\text{ce qui donne le facteur } \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{2\cos x}\right)$ la différentielle de la quantité subordonnée $1-\sin^2 x$; celle-ci est une différence dont la différentielle est (12) sauf le signe (ce qui donne le facteur -1), celle de la quantité retranchée $\sin^2 x$. Cette dernière, étant un carré, a pour différentielle (13) le double de la racine (d'où le facteur $2\sin x$) multipliée par sa différentielle. Comme il s'agit enfin d'une fonction simple, nous obtenons immédiatement (15) le dernier facteur $\cos x dx$. On retombe donc directement sur l'expression (2), qui se simplifie ensuite comme on a vu.

Comme le cosinus est une fonction importante, j'indiquerai encore la méthode la plus directe pour sa différen-

tiation

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$dy = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-dx) = -\sin x dx.$$

20. Exemple V. — Prenons encore quelques exemples pour les traiter directement. Soit

$$y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}.$$

Cette expression n'est pas encore réduite aux fonctions simples, mais il est inutile de compliquer davantage. Il suffit de ramener à une fonction que nous sachions déjà différentier, sans nous préoccuper de ce qu'elle est ou non de celles que nous sommes convenus de regarder comme simples. On aura de cette manière (12 et 19)

$$(3) \qquad dy = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

Exemple VI. — Considérons la fonction des tables trigonométriques (18, Ex. II et 15)

$$y = \log \sin x,$$

$$dy = \frac{d\sin x}{\sin x}\log e = \frac{\cos x dx}{\sin x}\log e = \cot x . \log e . dx.$$

Exemple VII. — Soit enfin

$$y = e^{e^{e^x}};$$

nous aurons en traitant cette expression comme une exponentielle (14),

$$dy = e^{\left(e^{e^x}\right)} d\left(e^{e^x}\right);$$

on a de même

$$d.e^{(e^x)} = e^{(e^x)}.de^x = e^{(e^x)}.e^x dx,$$

et par suite

$$dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x . dx.$$

On trouverait une formule toute semblable pour un nombre quelconque d'exponentielles superposées.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.

§ I.

REGLE GÉNÉRALE.

21. Je supposerai que y soit composé d'une manière quelconque avec u, v, w, ce qui s'exprime ainsi

$$y = f(u, v, w).$$

Je ne suppose que trois de ces quantités auxiliaires, mais il sera facile de voir que la démonstration est indépendante de leur nombre. Elles représentent ici, soit des fonctions simples, soit des fonctions de fonctions de x, en un mot des quantités dont nous sachions déjà calculer les différentielles du, dv, dw en x et dx.

De plus, je suppose qu'on les a assez multipliées pour que y dépende lui-même de chacune d'elles, à l'état de fonction simple ou de fonction de fonction. La question est alors de trouver dy.

L'accroissement de y sera exprimé par

$$dy = f(u + du, v + dv, w + dw) - f(u, v, w);$$

ce que je mettrai sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} dy = & [f(u + du, v + dv, w + dw) - f(u, v + dv, w + dw)] \\ & + [f(u, v + dv, w + dw) - f(u, v, w + dw)] \\ & + [f(u, v, w + dw) - f(u, v, w)]. \end{aligned}$$

Si nous ne considérons d'abord que la première partie, on voit que les deux dernières fonctions n'y entrent que par une seule de leurs valeurs $v + dv$ et $w + dw$. dv et dw n'y figureront donc jamais que devant v et w et pourront par suite être négligées en présence de ces quantités finies. Nous ne sommes pas autorisés à agir de même pour du, car rien ne prouve (et c'est même le contraire qui a lieu) que les termes finis en u ne disparaîtront pas dans la soustraction, attendu que cette fonction n'entre pas par une seule de ses valeurs mais par $u + du$ dans le premier terme et par u dans le second. Profitant donc des simplifications que nous sommes en droit de faire, nous écrirons ainsi cette première partie,

$$(4) \qquad f(u + du,\ v,\ w) - f(u,\ v,\ w).$$

En traitant de même la seconde par rapport à w, nous réduirons ainsi l'expression,

$$\begin{aligned} dy = & [f(u + du, v, w) - f(u, v, w)], \\ & + [f(u, v + dv, w) - f(u, v, w)], \\ & + [f(u, v, w + dw) - f(u, v, w)]. \end{aligned}$$

22. Actuellement je reprends la considération de la première partie (4). S'il était possible que u variât seul, sans que v et w changeassent de valeurs (ce qui n'a pas lieu en réalité, puisque toutes les trois dépendent d'une même quantité x); cette différence représenterait évidemment l'accroissement ou la différentielle de la fonction f ou y. C'est précisément parce que ce mode de variation n'est pas admissible au fond que cette partie ne constitue pas à elle seule toute la différentielle cherchée, mais doit être pour cela accompagnée des deux autres. Toujours est-il que si nous nous plaçons en connaissance de cause à ce point de vue, nous obtiendrons par la différentiation, cette première par-

tie. Et nous serons en état d'effectuer cette différentiation; car par cela même que pour le moment nous avons oublié la véritable nature de v et w, en les traitant non plus comme des fonctions de x, mais comme des constantes, f n'est plus censé contenir x que par u et alors cesse d'être une fonction composée de plusieurs autres pour devenir une fonction de fonction de u et par suite aussi de x.

La différentielle calculée à ce point de vue, purement fictif dans le cas actuel, s'appelle *différentielle partielle relative à u*, et nous la désignerons avec Euler par [1]

$$\left(\frac{dy}{du}\right)du.$$

Le premier facteur $\left(\frac{dy}{du}\right)$ est la *dérivée partielle relative à u*. Je viens de montrer que nous saurions la calculer. Quant à du, c'est une différentielle de fonction de fonction qui, comme j'en ai prévenu dès le début, nous est également connue. Ainsi ce terme doit être considéré comme complétement déterminé.

En raisonnant de même pour les deux autres parties, nous obtiendrons l'expression complète de la différentielle de y,

$$(5) \qquad dy = \left(\frac{dy}{du}\right)du + \left(\frac{dy}{dv}\right)dv + \left(\frac{dy}{dw}\right)dw.$$

Cette formule est fondamentale pour le calcul différentiel et évidemment indépendante du nombre des fonctions u, v, w, dont y est composé.

[1] Il est bien important, au moins dans le commencement, de conserver les parenthèses et surtout de ne pas simplifier sous la forme dy en supprimant haut et bas le facteur du. On n'a pas en effet là dy, comme j'ai eu soin d'y insister, mais seulement une de ses parties, qu'on pourrait désigner par $d_u y$, mais qu'il est préférable de représenter à la manière ordinaire.

§ II.

EXEMPLES GÉNÉRAUX.

23. Je vais dans quelques exemples mettre en évidence la manière dont y est composé avec u, v, w,..., sans spécifier encore la nature particulière de ces fonctions qui resteront indéterminées.

Exemple I. — Prenons une somme algébrique

$$y = u + v - w.$$

Au premier point de vue, où u est regardé comme variable, v et w comme constants, la différentielle est simplement du (12, somme):

$$\left(\frac{dy}{du}\right) du = du.$$

Au second, où v est pris comme variable, u et w comme constants, elle est de même dv:

$$\left(\frac{dy}{dv}\right) dv = dv.$$

Enfin au troisième, où w seul est variable, et u, v regardés comme constants, la différentielle est (12, différence):

$$\left(\frac{dy}{dw}\right) dw = - dw.$$

En réunissant ces trois parties, d'après la formule générale (5), il vient,

$$dy = du + dv - dw.$$

Ainsi pour différentier une somme algébrique de quan-

tités quelconques, et quel que soit leur nombre, il suffit de différentier chaque terme avec son signe.

24. EXEMPLE II. — Prenons en second lieu

$$y = uv.$$

On a au premier point de vue (12, produit) :

$$\left(\frac{dy}{du}\right) du = v\,du,$$

et au second :

$$\left(\frac{dy}{dv}\right) dv = u\,dv.$$

Réunissant ces deux parties,

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

Ainsi la différentielle d'un produit de deux facteurs est égale au premier facteur multiplié par la différentielle du second, plus le second facteur par la différentielle du premier.

25. Comme dans le chapitre précédent, ces longueurs de calcul, qui sont bonnes à conserver pour les commencements, doivent être rejetées dès qu'on a acquis quelque habitude. Je traiterai pour cela quelques exemples directement.

EXEMPLE III. — Si on considère le produit d'un nombre quelconque de facteurs, par exemple de quatre,

$$y = uvwz,$$

il vient

$$dy = vwz\,du + uwz\,dv + uvz\,dw + uvw\,dz.$$

EXEMPLE IV. — On a pour le quotient (12, produit

et rapport) :

$$x = \frac{u}{v},$$

$$dy = \frac{1}{v}\,du + u\,.\left(-\frac{dv}{v^2}\right),$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

D'après cela, la différentielle d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la différentielle du numérateur, moins le numérateur par la différentielle du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Exemple V. — Prenons en dernier lieu

$$y = u^v.$$

Au premier point de vue, nous avons une puissance de u dont la différentielle est (13) $vu^{v-1}\,du$. Au second, une exponentielle de v dont la base est u. Elle a pour différentielle (18, III) $u^v\,Lu\,dv$. On a donc

$$dy = vu^{v-1}\,du + u^v\,Lu\,dv = u^v\left(\frac{v}{u}\,du + Lu\,dv\right).$$

§ III.

EXEMPLES PARTICULIERS.

26. J'indiquerai maintenant quelques exemples dans lesquels la nature même des fonctions composantes sera mise en évidence. Et pour simplifier l'application de la règle générale, je me servirai des résultats précédents comme d'autant de théorèmes acquis.

Exemple I. — Soit d'abord

$$y = \tan g\,x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

On aura en appliquant les règles (25, IV et 19)

$$dy = \frac{\cos x \, . \, d\sin x - \sin x \, . \, d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \, . \, \cos x \, dx - \sin x \, (-\sin x \, dx)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Exemple II. — Soit maintenant (2)

$$y = \text{arc tang}\, x = \text{arc sin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right);$$

nous aurons d'abord par la règle des fonctions de fonctions (17)

$$dy = \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}.$$

Puis par celle des fractions (25, IV)

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}\, dx - x \, . \, d\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}\, dx - x \, \frac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\,dx - x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le second facteur se réduit, de son côté, de la manière sui-

vante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^2-x^2}}=\sqrt{1+x^2}.$$

De sorte qu'on a en définitive

$$(6)\qquad dy=\sqrt{1+x^2}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dx}{1+x^2}.$$

J'indiquerai encore une méthode directe, à cause de l'importance de cette fonction. L'équation

$$y=\text{arc tang } x$$

donne, en prenant les tangentes des deux membres,

$$\text{tang } y=x,$$

et en différentiant (26, I)

$$\frac{dy}{\cos^2 y}=dx;$$

d'où

$$dy=\cos^2 y\,.\,dx=\frac{dx}{1+\text{tang}^2 y}=\frac{dx}{1+x^2}.$$

Exemple III. — Soit encore (25, V)

$$y=x^x,$$

$$dy=x\,.\,x^{x-1}dx+x^x Lx\,dx=x^x(Lx+1)dx.$$

Exemple IV. — Prenons enfin

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$dy = 2\sin x\, d\sin x + 2\cos x\, d\cos x$$

$$= 2\sin x . \cos x\, dx + 2\cos x . (-\sin x\, dx) = 0.$$

Ce résultat était facile à prévoir, car l'expression $\sin^2 x + \cos^2 x$, étant égale à l'unité pour toutes les valeurs de x, ne reçoit aucun accroissement par la variation de x et a par suite une différentielle nulle.

C'est là un fait général, et lorsqu'une expression qui renferme en apparence une variable, en est au fond indépendante, sa différentielle prise par rapport à cette quantité est égale à zéro.

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

§ I.

FONCTIONS DONNÉES PAR UNE ÉQUATION.

27. Nous sommes actuellement en état de différentier toute expression qui nous sera donnée immédiatement; mais il arrive souvent qu'une fonction y est liée à sa variable x par une équation non résolue. A la vérité, on peut toujours supposer la résolution effectuée pour rentrer dans les cas précédents. Mais les ressources de l'analyse ordinaire sont par le fait si restreintes à cet égard, qu'il y a lieu de chercher à tourner cette difficulté et à obtenir directement la différentielle.

Désignons toujours par x la variable, par y la fonction appelée alors *implicite*, et donnons-nous leur relation sous la forme suivante, en réunissant tous les termes dans le premier membre

$$f(x, y) = 0.$$

Si on envisage l'expression f en elle-même et indépendamment de la condition qui l'égale ici à zéro, ce sera une fonction composée avec x et y qui est lui-même une fonction de x. A ce titre, elle a une différentielle que nous pouvons exprimer d'après le chapitre précédent (5, p. 33)

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy:$$

Mais dans le cas actuel on doit avoir $f = 0$, c'est-à-dire

que quand x vient à prendre arbitrairement diverses valeurs, y doit y adapter en quelque sorte les siennes pour que f ne cesse pas d'être nulle. Cette fonction ne reçoit donc aucun accroissement, et, par suite, sa différentielle est nulle

$$df = 0,$$

ou, d'après la valeur précédente,

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy = 0.$$

Cette équation que nous venons de déduire de la proposée, et qui peut en tenir lieu, résout pour nous la question, car dy s'y trouve en évidence et au premier degré. On en tire

$$dy = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)} dx,$$

et les deux dérivées partielles $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)$ se calculeront sans difficulté, puisque f nous est donnée immédiatement, tandis que y ne l'était pas.

28. L'expression de dy contiendra en général x, y et dx. Il pourra, à cet égard, se présenter deux cas. Ou bien l'équation proposée est véritablement insoluble, et alors on ne pourra aller plus loin. Ou bien on sera en état de la résoudre, mais on aura préféré s'en dispenser; attendu qu'une équation même simple peut introduire par sa résolution des expressions compliquées, de sorte qu'on aura meilleur marché à appliquer la méthode précédente qui n'exige que la différentiation de l'équation elle-même. Mais alors on pourra, la différentiation une fois effectuée,

résoudre après coup l'équation et en tirer la valeur de y pour la substituer dans l'expression obtenue. Celle-ci ne contiendra plus alors que x et dx.

29. Exemple I. — Prenons l'équation générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Nous posons, pour appliquer la méthode générale,

$$f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$$

et nous en tirons

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = By + 2Cx + E,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = 2Ay + Bx + D;$$

puis, en substituant,

$$dy = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}dx.$$

Dans la pratique, on évite ces longueurs en effectuant directement sur la relation proposée les calculs qui nous ont conduits à la formule générale, et qui consistent simplement à différentier l'équation en y considérant à la fois x et y comme variables. On aura, en opérant ainsi,

$$2Ay\,dy + B(x\,dy + y\,dx) + 2Cx\,dx + D\,dy + E\,dx = 0,$$

et, en groupant les termes,

$$(2Ay + Bx + D)\,dy + (By + 2Cx + E)\,dx = 0;$$

d'où on tire de nouveau la valeur précédente.

Exemple II. — On n'a même pas besoin, lorsque le second membre n'est pas nul, de tout réunir dans le premier.

Il suffit de différentier les deux membres. En effet, le second changerait de signe par cette transposition, ce signe se conserverait dans la différentiation et redeviendrait le même si on ramenait le résultat dans le second membre.

Comme exemple, je prendrai l'équation dite du *folium de Descartes*,

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Différentiant,

$$3x^2 dx + 3y^2 dy = 3(x dy + y dx);$$

d'où

$$dy = \frac{y - x^2}{y^2 - x} dx.$$

Exemple III. — Considérons encore l'équation suivante, qui a été discutée par Euler, en prenant, comme on a coutume de le faire pour la précédente, le rapport $\frac{y}{x}$ comme variable auxiliaire

$$x^y = y^x.$$

Différentiant,

$$y.x^{y-1}.dx + x^y Lx dy = x.y^{x-1} dy + y^x Ly dx.$$

Si on divise membre à membre, il reste simplement

$$\frac{y}{x} dx + Lx dy = \frac{x}{y} dy + Ly dx,$$

$$dy = \frac{\frac{y}{x} - Ly}{\frac{x}{y} - Lx} dx.$$

§ II.

FONCTIONS DONNÉES PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS.

30. Une fonction peut être déterminée d'une manière encore plus indirecte, lorsqu'elle est engagée avec plusieurs

autres dans un système d'équations non résolues. La question, qui était tout à l'heure d'éviter la résolution d'une équation, est maintenant de se passer de l'élimination de ce système pour trouver la différentielle de la fonction que l'on a particulièrement en vue, et accessoirement celles des autres fonctions qui l'accompagnent.

Désignons toujours par x la variable, par y la fonction principale et par $z, u, \ldots, w$; $n-1$ autres fonctions, ce qui donne en tout $n+1$ quantités. Nous les supposons liées par n équations que je représente en abrégé par

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \ldots, \quad f_n = 0,$$

et dont le type général sera

$$f_k(x; y, z, u, \ldots, w) = 0.$$

Si on envisage en elles-mêmes et indépendamment des conditions précédentes les expressions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ce sont des fonctions composées de x, car toutes les lettres qui y figurent représentent des fonctions de x. A ce titre, elles ont des différentielles $df_1, df_2, \ldots, df_n$, dont j'écris l'expression générale (5)

$$df_k = \left(\frac{df_k}{dx}\right) dx + \left(\frac{df_k}{dy}\right) dy + \left(\frac{df_k}{dz}\right) dz + \ldots + \left(\frac{df_k}{dw}\right) dw.$$

Mais les valeurs de $x, y, z, \ldots, w$ doivent se combiner de manière que les n quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ne cessent pas d'être nulles. Ces dernières ne reçoivent donc aucun accroissement et leurs différentielles sont nulles.

De là un nouveau système de n équations que je représente en abrégé par

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad df_3 = 0, \ldots, \quad df_n = 0,$$

et qui ont pour forme générale

$$\left(\frac{df_k}{dx}\right)dx + \left(\frac{df_k}{dy}\right)dy + \left(\frac{df_k}{dz}\right)dz + \ldots + \left(\frac{df_k}{dw}\right)dw = 0.$$

Ces équations, qui se déduisent des proposées, peuvent les remplacer et résolvent la question, car elles renferment les quantités dy, dz,..., dw au nombre de n, comme les équations elles-mêmes. Ces inconnues entrant au premier degré, il sera toujours possible d'en trouver un système de solutions et un seul (en réservant le cas des valeurs infinies et indéterminées auxquelles peuvent donner lieu des choix particuliers de la variable). Il serait même facile d'en écrire les expressions générales; mais ces formules ne nous seraient d'aucune utilité, car on doit toujours dans chaque cas opérer directement sur les équations proposées.

Les valeurs trouvées renferment ordinairement, outre x et dx, les n quantités y, z,..., w. Si le système est véritablement insoluble, on ne pourra aller plus loin; mais si on a eu seulement en vue d'éviter de compliquer les expressions à différentier par une élimination supposée possible, on pourra l'effectuer après coup, substituer les valeurs de y, z,..., w, et on aura alors les différentielles en fonction de x et dx seulement.

31. Exemple. — Appliquons cette méthode au système

$$e^x + e^y + e^z = m,$$
$$e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} = n.$$

Il vient par la différentiation

$$e^x dx + e^y dy + e^z dz = 0,$$
$$-e^{-x} dx - e^{-y} dy - e^{-z} dz = 0.$$

Pour faire disparaître dz, ajoutons après avoir multiplié

par e^{-z} et par e^{z},

$$(e^{x-z} - e^{z-x})\,dx + (e^{y-z} - e^{z-y})\,dy = 0\,;$$

on en tire

$$dy = \frac{e^{x-z} - e^{z-x}}{e^{z-y} - e^{y-z}}\,dx.$$

Pour avoir dz, il n'est pas nécessaire de répéter ces opérations. Car si on remarque que le système n'est pas modifié par le changement réciproque de y en z, il est clair qu'on est autorisé à opérer cette substitution à chaque instant du calcul ; ce qui donne immédiatement

$$dz = \frac{e^{x-y} - e^{y-x}}{e^{y-z} - e^{z-y}}\,dx.$$

CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

§ I.

DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

32. Il existe des *fonctions de plusieurs variables indépendantes,* comme je vais le faire comprendre par quelques exemples.

On a coutume, dans la géométrie analytique de l'espace, de rapporter les points à trois axes, ordinairement rectangulaires, et de représenter une surface par une équation entre x, y, z. Il est clair, en effet, qu'on a là tout ce qu'il faut pour en connaître tous les points. Car si on prend à volonté une valeur pour x, on détermine ainsi un certain plan parallèle au plan yz qui contient le point cherché. Si on se donne ensuite y, on obtient dans ce plan une droite parallèle à l'axe des z qui renferme encore ce point. Et rien dans le choix de la valeur de x ne préjuge celui de y, car on peut dans tout plan parallèle aux yz prendre des droites verticales à toutes distances du plan xz. Mais cela fait, on n'est plus maître de se donner la valeur de z. C'est l'équation qui l'assigne et qui apprend à quelle hauteur cette droite perce la surface. On a donc là une fonction z de deux variables absolument indépendantes l'une de l'autre, x et y.

Imaginons, en second lieu, un liquide en équilibre; il s'exercera en chacun de ses points une pression p variable de l'un à l'autre, et l'état de ce liquide sera représenté par une équation entre x, y, z, p. En effet, pour déterminer un point à volonté, on prendra d'abord x et y, indépendamment l'un de l'autre, comme on vient de le voir. Et il faudra encore se donner arbitrairement z, car la verticale fournie par les valeurs de x et y traverse la masse liquide sur une étendue finie, dans laquelle il faut encore préciser le point où l'on veut évaluer la pression. L'équation fera alors connaître la valeur p de cette pression. De là un exemple d'une fonction p de trois variables indépendantes x, y, z.

Supposons enfin un corps solide inégalement chauffé dans toutes ses parties, et cherchons à apprécier la température de chaque point à chaque instant. Il suffira, pour cela, d'une équation entre les trois coordonnées x, y, z, le temps t rapporté à une certaine origine et la température θ. En effet, pour préciser le point dont on s'occupe en particulier, il faudra, comme tout à l'heure, assigner des valeurs indépendantes à x, y, z. Mais comme ce point s'échauffe ou se refroidit, il faut encore indiquer à quel instant se fait la mesure ou donner à t une valeur dont on reste, bien entendu, le maître, quelles que soient celles que l'on a attribuées aux coordonnées. A ce moment, l'équation fait connaître la valeur de θ. On a ainsi un exemple d'une fonction θ de quatre variables indépendantes x, y, z, t.

Sans insister davantage, on voit qu'il y a lieu de considérer des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous allons nous proposer d'en chercher la différentielle, c'est-à-dire comme précédemment l'accroissement imparfait ou débarrassé des infiniment petits d'ordre supérieur, lorsque les variables indépendantes reçoivent elles-mêmes des accroissements infiniment petits,

qui sont arbitraires et indépendants comme les variables elles-mêmes.

§ II.

FONCTIONS EXPLICITES.

33. Soit u une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ Je la suppose donnée immédiatement sous la forme

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

Imaginons une variable auxiliaire t qui pour plus de clarté ne soit aucune de celles de la question. Puis établissons par la pensée des relations entre x et t, y et t, z et t, etc. Par là $x, y, z, \ldots$ deviennent des fonctions d'une seule variable t; et malgré cela, leur indépendance ne sera pas détruite si nous avons soin de laisser dans le vague et complétement indéterminées les relations hypothétiques que nous avons établies. Par là aussi u devient une fonction composée de t, et comme telle aura pour différentielle l'expression suivante (5):

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \ldots$$

Ce qui resterait à faire, si nous voulions rendre définitivement $x, y, z, \ldots$, fonctions de t, consisterait à tirer des relations établies $dx, dy, dz, \ldots$ en t et dt, et les substituer dans cette formule. Mais c'est ce que nous devons bien nous garder de faire, car préciser ces équations serait lier ensemble $x, y, z, \ldots$ ou détruire leur indépendance qu'il est nécessaire de conserver. Il faut, au contraire, considérer que ces relations, devant rester quelconques, laissent indéterminées les valeurs qu'on en tirerait pour $dx, dy, dz, \ldots$ Ces quantités figureront ainsi dans

la formule, comme cela devait être, à titre de quantités arbitraires.

34. La formule de la différentiation des fonctions de plusieurs variables se trouve au moyen de cet artifice établie sans aucun calcul ; et au premier abord elle paraît complétement identique à celle de la différentiation des fonctions composées (5). Il y a cependant entre elles une différence profonde, qu'il est essentiel de faire ressortir.

Dans la formule des fonctions composées tous les termes sont indispensables, car ils sont relatifs à des fonctions d'une seule variable qui varient forcément toutes à la fois. Omettre un seul de ces termes serait négliger une quantité devant d'autres du même ordre et fausser complétement le calcul.

Il en est tout autrement pour la formule des fonctions de plusieurs variables. Les facteurs dx, dy, dz,... y sont arbitraires et on reste maître, si l'on veut, d'en prendre un certain nombre rigoureusement égaux à zéro, en donnant aux autres des valeurs infiniment petites. Cela revient à ne faire varier qu'une partie des variables, en conservant aux autres leurs valeurs actuelles; et cela est permis, puisque ces quantités sont à notre disposition et que ce qui a lieu pour l'une ne préjuge rien pour le reste. On n'est donc pas obligé de prendre tous les termes de cette formule, et on peut conserver les uns et supprimer les autres tout à fait comme on l'entend.

Il est inutile d'avertir qu'on n'obtient pas par là toujours le même accroissement pour u. A cet égard il existe des dénominations qu'il faut faire connaître. Quand on conserve tous les termes, on a la différentielle *totale*, et il n'en existe qu'une seule. Si on ne prend qu'un seul terme, on obtient la différentielle *partielle* relative à la lettre qui y figure : il y en a autant que de variables. Enfin quand

on ne prend ni tous les termes, ni un seul, mais un nombre quelconque, on trouve des différentielles plus ou moins *particulières*, dont je ne m'arrête pas à préciser le nombre.

35. Exemple. — Appliquons ce qui précède à la fonction du second degré de trois variables,

$$u = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Bxy + B'xz + B''yz$$
$$+ Cx + C'y + C''z + D.$$

On trouve successivement

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2Ax + By + B'z + C,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2A'y + Bx + B''z + C',$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right) = 2A''z + B'x + B''y + C'',$$

et, en substituant,

$$du = (2Ax + By + B'z + C)\,dx$$
$$+ (2A'y + Bx + B''z + C')\,dy$$
$$+ (2A''z + B'x + B''y + C'')\,dz.$$

On évite encore ces longueurs en différentiant directement par rapport à toutes les variables à la fois, de la manière suivante :

$$du = 2Axdx + 2A'ydy + 2A''zdz$$
$$+ B(xdy + ydx) + B'(xdz + zdx) + B''(ydz + zdy)$$
$$+ Cdx + C'dy + C''dz.$$

Si on groupe maintenant les termes, on retrouve la même expression.

§ III.

FONCTIONS DONNÉES PAR UNE ÉQUATION.

36. Supposons en second lieu que la fonction u, au lieu d'être donnée directement, soit liée à ses variables $x, y, z, \ldots$, par une équation non résolue,

$$f(x, y, z, \ldots; u) = 0.$$

Il nous suffira, pour traiter ce cas, de combiner l'emploi des deux artifices qui nous ont servi pour les fonctions implicites et pour les fonctions de plusieurs variables.

Imaginons une variable auxiliaire t et faisons-en dépendre $x, y, z, \ldots$, d'une manière qui reste indéterminée pour conserver l'indépendance. u, qui est fonction de $x, y, z, \ldots$, devient par là fonction de t. f, envisagée en elle-même et indépendamment de la condition précédente, devient elle-même une fonction composée de t. A ce titre elle a une différentielle qui s'exprime par

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dz}\right) dz + \ldots + \left(\frac{df}{du}\right) du.$$

Mais cette fonction doit rester constamment nulle. Donc on a

$$df = 0,$$

équation qui nous fournit la valeur de du,

$$du = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{du}\right)} dx - \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{du}\right)} dy - \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)}{\left(\frac{df}{du}\right)} dz - \ldots\ldots$$

Il resterait à substituer $dx, dy, dz, \ldots$, en t et dt, ce que nous nous gardons de faire pour ne pas détruire l'indépendance.

Nous considérons au contraire dx, dy, dz,..., comme des arbitraires, et alors l'expression précédente nous fournit la différentielle *totale* de u que nous cherchions.

Elle renfermera, en général, u outre $x, y, z, \ldots$, et dx, dy, dz. On le conservera ou on aura la faculté de le faire disparaître, suivant que l'équation proposée sera ou non insoluble.

37. Exemple. — Appliquons à l'équation

$$\sin^2 ux + \sin^2 uy + \sin^2 uz = m.$$

Il vient, en différentiant,

$$\begin{aligned} &2 \sin ux . \cos ux . (udx + xdu) \\ &+ 2 \sin uy . \cos uy . (udy + ydu) \\ &+ 2 \sin uz . \cos uz . (udz + zdu) = 0. \end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} &(x . \sin 2ux + y . \sin 2uy + z . \sin 2uz)\, du \\ &+ (\sin 2ux . dx + \sin 2uy . dy + \sin 2uz . dz)\, u = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} du = &- \frac{u \sin 2ux}{x \sin 2ux + y \sin 2uy + z \sin 2uz}\, dx \\ &- \frac{u \sin 2uy}{x \sin 2ux + y \sin 2uy + z \sin 2uz}\, dy \\ &- \frac{u \sin 2uz}{x \sin 2ux + y \sin 2uy + z \sin 2uz}\, dz. \end{aligned}$$

§ IV.

FONCTIONS DONNÉES PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS.

38. Supposons, pour former le cas le plus général de la

différentiation, m quantités,

$$x,\ y,\ z,\ldots;\ldots\ u,\ v,\ w,$$

entre lesquelles il existe un nombre moindre n de relations,

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad f_3 = 0,\ldots,\quad f_n = 0,$$

dont le type général sera

$$f_k(x, y, z,\ldots;\ldots\ u, v, w) = 0.$$

On peut considérer n de ces quantités,

$$\ldots,\ u,\ v,\ w,$$

comme des fonctions implicites des $m - n$ autres,

$$x,\ y,\ z,\ldots,$$

traitées elles-mêmes comme variables indépendantes. Si donc nous nous donnons les $m - n$ différentielles arbitraires

$$dx,\quad dy,\quad dz,\ldots,$$

nous pouvons nous proposer de déterminer les n différentielles totales,

$$\ldots,\quad du,\quad dv,\quad dw.$$

Pour cela, nous lierons à t, d'une manière indéterminée, $x, y, z,\ldots$, et par suite, $\ldots, u, v, w$. Alors $f_1, f_2,\ldots, f_n$, considérées en elles-mêmes, auront des différentielles, df_1, $df_2,\ldots, df_n$. Mais celles-ci doivent être nulles puisque f_1, $f_2,\ldots, f_n$, ne cessent pas de l'être elles-mêmes. Donc on peut remplacer le système proposé par le suivant,

$$df_1 = 0,\quad df_2 = 0,\quad df_3 = 0,\quad \ldots,\quad df_n = 0,$$

dans lequel chaque équation est de la forme

$$\left(\frac{df_k}{dx}\right) dx + \left(\frac{df_k}{dy}\right) dy + \left(\frac{df_k}{dz}\right) dz + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{df_k}{du}\right) du + \left(\frac{df_k}{dv}\right) dv + \left(\frac{df_k}{dw}\right) dw = 0.$$

Ces n équations sont du premier degré par rapport aux n inconnues,..., du, dv, dw, et permettront toujours de leur trouver un système de valeurs et un seul.

Ces solutions renfermeront, en général, ... u, v, w, outre x, y, z..., et dx, dy, dz,.... On les conservera, ou on aura la faculté de les faire disparaître, suivant que le système proposé sera ou non insoluble.

39. Exemple. — Appliquons cette méthode au système suivant,

$$\sin x + \sin y + \sin u + \sin v = m,$$
$$\cos x + \cos y + \cos u + \cos v = n.$$

Il vient, par la différentiation,

$$\cos x dx + \cos y dy + \cos u du + \cos v dv = 0,$$
$$-\sin x dx - \sin y dy - \sin u du - \sin v dv = 0.$$

Pour chasser dv, je multiplie par $\sin v$, $\cos v$, et j'ajoute. Si je forme à part le coefficient de l'une des différentielles, dx par exemple, il sera

$$\sin v \cos x - \sin x \cos v = \sin(v - x).$$

On peut donc écrire simplement

$$\sin(v - x) dx + \sin(v - y) dy + \sin(v - u) du = 0,$$

d'où on tire

$$du = \frac{\sin(v - x)}{\sin(u - v)} dx + \frac{\sin(v - y)}{\sin(u - v)} dy.$$

Pour obtenir dv, il suffit, en se fondant sur la symétrie des équations, de changer réciproquement u et v. Il vient par là

$$dv = \frac{\sin(u - x)}{\sin(v - u)} dx + \frac{\sin(u - y)}{\sin(v - u)} dy.$$

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIATION DES DIVERS ORDRES.

§ I.

FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

40. La différentielle d'une fonction est aussi une fonction, et à ce titre elle admet elle-même une différentielle, qu'on appelle la différentielle *seconde* de la proposée. Celle-ci en a une à son tour qui forme la différentielle *troisième*, et ainsi de suite indéfiniment.

La différentielle étant, en général, infiniment petite par rapport à sa fonction primitive, la différentielle seconde le sera relativement à la première et formera par suite un infiniment petit du second ordre. Et généralement une différentielle de l'ordre n sera un infiniment petit du même ordre.

41. Désignons par y une fonction de x. Si on donne à la variable un accroissement dx, y reçoit l'accroissement imparfait dy qui dépend lui-même de x. Si x subit maintenant un nouvel accroissement quelconque dx', dy en recevra un qui sera naturellement désigné par $d(dy)$.

Rien n'oblige à donner deux fois de suite à x le même accroissement, car son mode de variation reste à notre disposition ; mais par cela même il y a lieu d'en disposer pour obtenir la plus grande simplicité possible, et pour cela de faire varier x encore de la même quantité dx. Dans cette hypothèse, toute de convention, mais universellement adoptée, la différentielle seconde se désigne par d^2y.

Pour obtenir la troisième, nous donnerons encore à x l'accroissement dx en renouvelant la même convention, et nous l'écrirons d^3y. Généralement nous désignerons par d^ny la $n^{ième}$ différentielle de y, en convenant que la variable indépendante x varie constamment par degrés égaux, ou encore que sa différentielle dx sera traitée comme une constante, ou enfin que ses différentielles d'ordre supérieur à commencer par la seconde d^2x sont toutes nulles.

42. La notion des dérivées s'adapte facilement à ce genre d'opérations. La dérivée d'une fonction est en effet aussi une fonction, et à ce titre elle admet elle-même une dérivée qu'on appelle la dérivée *seconde* de la proposée. On introduit de même la dérivée *troisième*, et généralement des dérivées de tous les ordres.

Nous avons désigné par $f'(x)$ à l'aide d'un accent la dérivée de $f(x)$. D'après cela, il sera tout naturel de représenter par $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$ et par $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x), \ldots f^{(n)}(x) \ldots$, les dérivées troisième, quatrième et d'ordre n de la fonction $f(x)$.

43. Mais dès que nous introduisons deux notations différentes pour désigner une seule et même chose, il devient nécessaire d'en connaître la correspondance.

Or nous la possédons, pour le premier ordre, d'après l'équation (1, p. 14)

$$dy = f'(x)\,dx.$$

On en tire en différentiant (24)

$$d^2y = dx.df'(x) + f'(x)\,d^2x.$$

Le second terme disparaît en raison de la convention établie. Quant à $df'(x)$, elle s'exprime d'après l'équation même (1) au moyen du produit de la dérivée $f''(x)$ par dx.

On a donc simplement

$$(7)\qquad d^2y = f''(x)\,dx^2,\quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

En continuant ainsi, on trouvera

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},\quad f^{\text{iv}}(x) = \frac{d^4y}{dx^4},\ldots,\quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ces rapports sont essentiellement finis, puisque les deux termes sont du même ordre. On remarquera de plus que la simplicité de ces relations tient positivement à la convention que nous avons introduite, et sans laquelle de nouveaux termes se seraient introduits à chaque différentiation.

§ II.

FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. — DIFFÉRENTIATION.

44. *Fonctions explicites.* — Il n'y a pour les fonctions explicites aucune règle nouvelle à donner. On n'éprouvera jamais de difficulté à différentier successivement le résultat obtenu chaque fois.

Dans certains cas particuliers, on peut saisir la loi de formation des différentielles successives, de manière à envisager de suite un ordre quelconque. J'en vais donner quelques exemples qui nous seront utiles plus tard.

Exemple I. — Si on prend

$$y = e^x,$$

on a d'abord (14)

$$\frac{dy}{dx} = e^x;$$

la fonction se conservant sans altération à chaque opéra-

tion, on aura toujours

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x.$$

Exemple II. — Pour une exponentielle quelconque

$$y = m^x,$$

on a (18, III)

$$\frac{dy}{dx} = m^x Lm.$$

La fonction se conserve cette fois, sauf le facteur constant Lm. On aura, par suite,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^x L^n m.$$

Exemple III. — On a trouvé pour le sinus (15)

$$y = \sin x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le sinus se conserve, sauf l'addition d'un quadrant à l'arc, ce qui ne change pas la dérivée de l'arc lui-même qui reste égale à l'unité. Par suite, bien que le sinus soit devenu fonction de fonction, chaque différentiation reviendra à l'addition d'un quadrant, et on aura, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exemple IV. — On trouve absolument de même (19)

$$y = \cos x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exemple V. — La différentiation de la puissance (13)

$$y = x^m$$

revient à multiplier par l'exposant constant et le diminuer d'une unité,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Après n différentiations, l'exposant se sera donc abaissé de n unités, et toutes ses valeurs intermédiaires entreront en facteurs successifs sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Cette formule est complétement générale.

Dans le cas particulier où m est entier et positif, elle donne pour la dérivée d'un ordre égal à l'exposant

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3\ldots m,$$

valeur constante. Toutes les dérivées d'ordre supérieur seront par suite nulles. Ainsi le monôme, et, par suite, le polynôme entier et rationnel, présentent cette propriété caractéristique, d'avoir un nombre fini et égal à leur degré de dérivées. La dernière est constante et égale au produit des nombres consécutifs jusqu'à ce degré, multiplié en outre, s'il y a lieu, par le coefficient du monôme ou du premier terme du polynôme.

Exemple VI. — Soit enfin (14)

$$y = Lx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

et, par suite,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}.$$

Il suffit donc d'appliquer la formule précédente en faisant $m = -1$ et changeant n en $n-1$.

On trouve d'abord, en faisant abstraction du signe qui change à chaque différentiation,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \pm 1.2.3\ldots(n-1).x^{-n},$$

ce que j'écrirai ainsi :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(-x)^n},$$

En effet, le signe sera alterné comme il doit l'être par les puissances d'une quantité négative ; en outre, le signe négatif, qui est mis en évidence, a pour effet de réduire l'expression à celui qu'elle doit avoir pour la première dérivée, et, par suite, pour toutes les autres.

45. *Fonctions données par une équation.* — Il suffit pour traiter ce cas d'appliquer plusieurs fois de suite la méthode qui s'y rapporte (27).

Ayant une équation entre x et y, on la différentie et on en obtient une autre du premier degré en dy. On l'en déduit en x, y et dx. On différentie de nouveau, ce qui fournit une relation où figurera d^2y. Elle sera du premier degré, puisque dy, d'où provient par la différentiation d^2y, entrait lui-même au premier degré. Quant à d^2x, il ne s'y trouvera pas, d'après la convention fondamentale. On tirera donc de là d^2y en x, y, dx, dy, et comme on vient d'évaluer dy, on pourra le substituer et ne conserver que x, y et dx. Différentiant encore, on aura une relation du premier degré en d^3y qui en fournira la valeur en x, y, dx, dy, d^2y, et comme on vient de calculer dy et d^2y en x, y et dx seulement ; et ainsi de suite.

Dans les cas particuliers où l'équation proposée sera

résoluble, on pourra ultérieurement en tirer y, et les différentielles seront exprimées en x et dx seulement.

46. Exemple. — Prenons l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On obtient par des différentiations successives :

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y = 0,$$
$$2\,dy\,d^2y + dy\,d^2y + y\,d^3y = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et on en déduit de proche en proche

$$dy = -\frac{x}{y}\,dx,$$

$$d^2y = -\frac{dx^2 + dy^2}{y} = -dx^2\,\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}\,dx^2 = -\frac{dx^2}{y^3},$$

$$d^3y = -\frac{3\,dy\,d^2y}{y} = -\frac{3\,\frac{x}{y}\,dx.\frac{dx^2}{y^3}}{y} = -3\,\frac{x}{y^5}\,dx^3.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Rien n'empêcherait maintenant de tirer de l'équation proposée la valeur de y pour obtenir les différentielles en x et dx seulement.

47. *Fonctions données par un système d'équations.* — Ayant n équations entre n fonctions $y, z, \ldots, u$ et la variable x, nous appliquons successivement la méthode connue (30). Nous différentions et nous obtenons un système de n équations du premier degré qui détermine dy, $dz, \ldots, du$ en x, dx et $y, z, \ldots, u$. Différentiant de

nouveau, nous formons n nouvelles équations du premier degré qui donnent d^2y, d^2z, ..., d^2u en x et dx, et aussi $y, z, \ldots, u$; $dy, dz, \ldots, du$. Mais ces dernières viennent d'être calculées et on peut réduire les expressions à ne contenir que x, dx et $y, z, \ldots, u$; et ainsi de suite.

Dans les cas particuliers où le système sera résoluble, on pourra encore chasser $y, z, \ldots, u$ pour ne conserver que x et dx.

48. Exemple. — Soient les équations

$$x + y + z = m,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = n;$$

on trouve d'abord

$$dx + dy + dz = 0,$$
$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

en second lieu

$$d^2y + d^2z = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y + dz^2 + z\,d^2z = 0,$$

et ainsi de suite.

Le premier système donne d'abord

$$dy = \frac{z - x}{y - z}\,dx, \quad dz = \frac{y - x}{z - y}\,dx.$$

Quant au second, sa première équation permet de mettre l'autre sous la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (y - z)\,d^2y = 0;$$

d'où on tire

$$d^2y = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z - y},$$

ou, en substituant les valeurs précédentes,

$$d^2y = \frac{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}{(z - y)^3};$$

on a ensuite, par inversion de lettres,

$$d^2 z = \frac{(z-y)^2 + (y-x)^2 + (x-z)^2}{(y-z)^3}.$$

§ III.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

49. On étend aux fonctions de plusieurs variables la convention précédente, en faisant constamment croître les variables par degrés égaux, qui restent, bien entendu, indépendants de l'une à l'autre. Cela revient encore à traiter comme des constantes les différentielles arbitraires des variables indépendantes ou comme nulles leurs différentielles d'ordres supérieurs, à partir de la seconde.

Si on fait à chaque fois varier toutes les variables ensemble, on obtient les différentielles *totales première*, *seconde*, *troisième*, etc. Si on n'en fait varier qu'une à chaque fois, sans que ce soit nécessairement toujours la même, on a des différentielles *partielles*, *du premier*, *du second*, *du troisième*..., *ordres*. Enfin si on les fait varier de toute autre manière, on trouve des différentielles plus ou moins *particulières des divers ordres*.

50. Les différentielles totales se désignent encore par du, d^2u, d^3u, ..., $d^n u$, ... Les différentielles particulières seront des sommes d'un certain nombre de différentielles partielles. Il reste donc à indiquer comment on exprimera ces dernières.

Pour plus de clarté, je ne suppose d'abord que deux variables indépendantes x et y. Si on ne fait varier chaque fois que x, on rentre dans le cas d'une fonction d'une seule variable x, et par suite la seconde différentielle partielle

s'exprimera comme nous avons vu (7, p. 58) par le produit de la dérivée $\frac{d^2u}{dx^2}$ par dx^2. Seulement les parenthèses deviennent nécessaires pour rappeler qu'il s'agit d'une variation partielle

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2$$

De même, si on ne fait varier que y, on aura

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2.$$

Il reste encore deux combinaisons qui consistent à faire varier d'abord x, puis y; ou y et ensuite x. De là deux autres différentielles partielles pour lesquelles l'analogie nous fournit les symboles

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy, \quad \left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx.$$

51. Or, je dis que ces deux expressions sont équivalentes. Si on part, en effet, de la valeur de u qui se rapporte à celles x, y des variables,

$$x, y; \quad u;$$

en faisant d'abord varier x, ces quantités deviennent

$$x + dx,\ y; \quad u + \left(\frac{du}{dx}\right)dx;$$

puis, en faisant varier y seul,

$$x + dx,\ y + dy;$$

$$\left[u + \left(\frac{du}{dy}\right)dy\right] + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy\right];$$

en effet, ce dernier terme vient d'être introduit pour désigner l'accroissement que fait subir la variation de y à l'ac-

croissement $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ qui est résulté pour u de la variation de x.

De même, en reprenant les valeurs initiales,

$$x, y; \quad u;$$

pour faire varier en premier lieu y, on trouve d'abord

$$x, y + dy; \quad u + \left(\frac{du}{dy}\right)dy,$$

et en donnant ensuite à x son accroissement

$$x + dx, y + dy;$$

$$\left[u + \left(\frac{du}{dx}\right)dx\right] + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx\right].$$

Or dans les deux cas nous sommes parvenus à la valeur de la fonction qui correspond à $x + dx$, $y + dy$. Nous devons donc avoir le même résultat, et par suite, en supprimant les parties communes,

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy = \left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx.$$

De là ce théorème essentiel : On peut intervertir l'ordre de deux différentiations.

52. Il s'ensuit immédiatement qu'on peut modifier d'une manière quelconque l'ordre des différentiations. Car ayant le droit de le changer pour deux consécutives, nous pouvons avancer d'un rang la seconde, puis, la combinant avec celle qui alors la précède immédiatement, lui faire franchir encore ce pas et l'amener ainsi finalement à tel rang que nous jugerons convenable; et cela évidemment quel que soit le nombre des variables.

Ce qu'il y a de plus simple consiste dès lors à grouper ensemble toutes les différentiations relatives à la même variable. On pourra donc former de la manière suivante le type le plus général des différentielles partielles d'un ordre quelconque $n = p + q + r + \ldots$,

$$\left(\frac{d^{p+q+r+\ldots}u}{dx^p\,dy^q\,dz^r\ldots}\right) dx^p dy^q dz^r \ldots.$$

§ IV.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. — DIFFÉRENTIATION.

53. *Fonctions explicites.* — Lorsqu'une fonction particulière sera donnée directement, on ne rencontrera jamais de difficultés pour sa différentiation. Il suffira d'appliquer plusieurs fois de suite la règle connue (33).

Exemple. — Considérons l'expression

$$u = x^2y^2;$$

on en déduit successivement

$$du = 2\,xy^2\,dx + 2\,x^2y\,dy,$$
$$d^2u = 2\,y^2\,dx^2 + 8\,xy\,dx\,dy + 2\,x^2\,dy^2,$$
$$d^3u = 12\,y\,dx^2\,dy + 12\,x\,dx\,dy^2,$$
$$d^4u = 24\,dx^2\,dy^2,$$
$$d^5u = 0.$$

54. On peut pour une fonction quelconque donner au résultat une forme remarquable qu'il est bon de connaître.

Si on suppose trouvée la différentielle totale d'un certain ordre, il faudra pour obtenir la suivante ajouter ensemble les différentielles totales de tous les termes. Chacun

d'eux sera de la forme

$$v = \mathrm{K}\left(\frac{d^{p+q+r+\cdots}u}{dx^p\,dy^q\,dz^r\ldots}\right)dx^p\,dy^q\,dz^r\ldots;$$

et aura pour différentielle totale

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après nos notations,

$$\begin{aligned} &\mathrm{K}\left(\frac{d^{p+1+q+r+\cdots}u}{dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r\ldots}\right)dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r\ldots\\ &+\mathrm{K}\left(\frac{dx^{p+q+1+r+\cdots}u}{dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r\ldots}\right)dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r\ldots\\ &+\mathrm{K}\left(\frac{dx^{p+q+r+1+\cdots}u}{dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}\ldots}\right)dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'on reproduirait cette expression en effectuant purement et simplement le mécanisme des calculs indiqués par la formule

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)dx + \left(\frac{d}{dy}\right)dy + \left(\frac{d}{dz}\right)dz + \cdots\right] \times \mathrm{K}\left(\frac{d^{p+q+r+\cdots}u}{dx^p dy^q dz^r\ldots}\right)dx^p\,dy^q\,dz^r\ldots,$$

comme si les lettres qui figurent dans le premier facteur représentaient des quantités, tandis qu'elles ne sont que des caractéristiques d'opérations. Une telle formule est appelée *symbolique*.

Or, ce premier facteur sera le même pour tous les termes de la différentielle considérée, de sorte que, pour passer à la suivante, il suffira de la multiplier tout entière par

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)dx + \left(\frac{d}{dy}\right)dy + \left(\frac{d}{dz}\right)dz + \cdots\right].$$

Mais la première différentielle totale a pour expression

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \cdots,$$

et s'obtient de son côté en multipliant u par ce même facteur. On aura donc symboliquement pour la $n^{ième}$ différentielle totale :

$$d^n u = \left[\left(\frac{d}{dx}\right) dx + \left(\frac{d}{dy}\right) dy + \left(\frac{d}{dz}\right) dz + \cdots\right]^n . u.$$

Si on considère en particulier une fonction de deux variables seulement x et y, le développement sera, d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} d^n u = & \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right) dx^n + \frac{n}{1}\left(\frac{d^n u}{dx^{n-1} dy}\right) dx^{n-1} dy \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2}\right) dx^{n-2} dy^2 + \cdots \\ & \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{d^n u}{dx^2 dy^{n-2}}\right) dx^2 dy^{n-2} \\ & + \frac{n}{1}\left(\frac{d^n u}{dx dy^{n-1}}\right) dx dy^{n-1} + \left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) dy^n. \end{aligned}$$

55. *Fonctions données par une équation.* — Appliquant la méthode (36), nous différentierons et nous aurons une équation du premier degré pour exprimer du en $x, y, z, \ldots$; $dx, dy, dz, \ldots$, et u. Différentiant encore, une nouvelle équation du premier degré fera connaître d^2u en $x, y, z, \ldots$; $dx, dy, dz, \ldots$; u et du, et on chassera ce dernier terme à l'aide de sa valeur qui vient d'être calculée. Une troisième équation du premier degré donnera d^3u en $x, y, z, \ldots$; $dx, dy, dz, \ldots$; u, du, d^2u, dont on fera encore disparaître les deux dernières. Et ainsi de suite.

Lorsque l'équation proposée sera résoluble, on pourra encore remplacer u par sa valeur, et les différentielles succes-

sives seront exprimées en x, y, z, ...; dx, dy, dz, ..., seulement.

Exemple. — Traitons comme si elle était insoluble l'équation

$$uxy = m.$$

On aura d'abord

$$xydu + u(xdy + ydx) = 0,$$
$$xyd^2u + 2(xdy + ydx)du + 2udxdy = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première donne

$$du = -\frac{u}{xy}(xdy + ydx),$$

et la seconde

$$d^2u = -\frac{2}{xy}[udxdy + (xdy + ydx)du]$$
$$= -\frac{2}{xy}\left[udxdy - \frac{u(xdy + ydx)^2}{xy}\right]$$
$$= \frac{2u}{x^2y^2}(x^2dy^2 + y^2dx^2 + xydxdy).$$

56. *Fonctions données par un système d'équations.* — On applique la méthode (38) dont nous conserverons les notations. Pour cela on différentie et on obtient des équations du premier degré pour déterminer les différentielles totales premières, ..., du, dv, dw, en x, y, z,...; dx, dy, dz,..., et ..., u, v, w. On différentie de nouveau et on obtient au premier degré les différentielles totales secondes ..., d^2u, d^2v, d^2w, en x, y, z, ...; dx, dy, dz, ..., et en outre ..., u, v, w; ..., du, dv, dw, mais on chasse ces dernières au moyen des valeurs précédentes. Et ainsi de suite.

Lorsque l'élimination du système proposé est possible, on remplace en outre ..., u, v, w par leurs valeurs en x, y, z, ..., et on obtient les différentielles totales successives en x, y, z, ...; dx, dy, dz, ..., seulement.

Exemple. — Considérons les équations

$$u + v = x + y,$$
$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2.$$

On en tire d'abord

$$du + dv = dx + dy,$$
$$u\,du + v\,dv = x\,dx + y\,dy;$$

en second lieu

$$d^2u + d^2v = 0,$$
$$du^2 + u\,d^2u + dv^2 + v\,d^2v = dx^2 + dy^2;$$

et ainsi de suite.

Les deux premières donnent

$$du = \frac{(v - x)\,dx + (v - y)\,dy}{v - u},$$
$$dv = \frac{(u - x)\,dx + (u - y)\,dy}{u - v}.$$

Passant au second système, la première équation donne

$$d^2v = -\,d^2u,$$

et transforme ainsi la seconde

$$du^2 + dv^2 - dx^2 - dy^2 + (u - v)\,d^2u = 0.$$

On en tire

$$d^2u = \frac{du^2 + dv^2 - dx^2 - dy^2}{v - u}$$
$$= \frac{\dfrac{[(v - x)dx + (v - y)dy]^2}{(v - u)^2} + \dfrac{[(u - x)dx + (u - y)dy]^2}{(u - v)^2} - dx^2 - dy^2}{v - u}$$
$$= \frac{[(v - x)dx + (v - y)dy]^2 + [(u - x)dx + (u - y)dy]^2 - (v - u)^2(dx^2 + dy^2)}{(v - u)^3}.$$

et en effectuant tous les calculs

$$d^2u = \frac{(v-x)^2+(u-x)^2-(v-u)^2}{(v-u)^3}dx^2 + \frac{(v-y)^2+(u-y)^2-(v-u)^2}{(v-u)^3}dy^2 + 2\frac{(v-x)(v-y)+(u-x)(u-y)}{(v-u)^3}dx\,dy.$$

On a ensuite, en changeant le signe ou en permutant u et v,

$$d^2v = \frac{(u-x)^2+(v-x)^2-(u-v)^2}{(u-v)^3}dx^2 + \frac{(u-y)^2+(v-y)^2-(u-v)^2}{(u-v)^3}dy^2 + 2\frac{(u-x)(u-y)+(v-x)(v-y)}{(u-v)^3}dx\,dy.$$

CHAPITRE VII.

CHANGEMENT DE VARIABLES.

§ I.

OBJET DU CHANGEMENT DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

57. Il se présente fréquemment dans l'analyse ordinaire des occasions où, après avoir effectué des calculs et établi des formules où figurent certaines variables, on veut abandonner leur considération pour leur substituer d'autres quantités qui seront plus avantageuses à certains égards. Cependant on ne veut pas reprendre les recherches au commencement et on désire profiter des résultats acquis. La marche à suivre pour cela est bien simple et consiste à se procurer l'expression des anciennes variables en fonction des nouvelles, d'après les relations qui doivent, bien entendu, les unir pour que les unes puissent remplacer les autres. On n'a plus ensuite qu'à reporter ces valeurs dans les formules à transformer. Les anciennes variables disparaissent par cette substitution qui introduit, au contraire, les nouvelles.

La transformation des coordonnées en géométrie analytique fournit un exemple bien connu de cette méthode.

58. Par les procédés du calcul infinitésimal, nous introduisons, outre les variables elles-mêmes, leurs différentielles ou leurs dérivées. Il ne suffit donc plus, pour qu'il ne reste pas de traces des anciennes quantités, de les remplacer par leurs valeurs; il faut encore connaître les expres-

sions qu'on doit substituer à ces différentielles. Tel est le problème du changement de variables.

Nous avons de plus établi une convention qui place les diverses variables dans des conditions différentes. Celles qui sont considérées comme fonctions des autres ont seules des différentielles d'ordre supérieur, les variables indépendantes n'ayant que la première. Si donc, pour une raison quelconque, on veut, conservant, au moins en partie, les anciennes variables, cesser de considérer comme indépendantes celles qui avaient été envisagées à ce point de vue; elles devront recouvrer des différentielles d'ordre supérieur, tandis que les nouvelles variables indépendantes perdront les leurs. De là une altération profonde subie par les formules, et dont l'appréciation forme le second côté de la question du changement de variables indépendantes.

Il est facile d'établir, à ce sujet, des formules tout à fait générales, mais elles ont peu d'utilité pratique. Je me contenterai de faire saisir l'esprit de cette théorie par deux problèmes qui sont, au contraire, d'une application fréquente. Je traiterai le premier avec la notation des dérivées, et le second avec celle des différentielles, pour montrer comment l'une et l'autre peuvent s'adapter à ce genre de questions.

§ II.

INVERSION DE LA FONCTION ET DE LA VARIABLE.

59. Je suppose qu'on ait considéré x comme une variable indépendante, y comme sa fonction

$$y=f(x),$$

et que ces quantités figurent dans une expression quel-

conque

$$\varphi[x,\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots].$$

On veut ensuite intervertir les rôles, c'est-à-dire regarder dorénavant y comme variable indépendante et x comme sa fonction que je représente par

$$x = \mathrm{F}(y).$$

F est appelée la *fonction inverse* de f, et s'obtient en résolvant en sens contraire l'équation précédente. Il faudra d'abord pour cela remplacer dans l'expression de φ, x et $f(x)$ par $\mathrm{F}(y)$ et y, et la question est de connaître les valeurs à substituer aux autres quantités $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,....

Je considère pour cela l'équation

$$x = \mathrm{F}(y),$$

et je prends sa dérivée par rapport à x. Le premier membre devient l'unité. Le second, traité comme fonction de fonction, donne $\mathrm{F}'(y)$ multipliée par la dérivée de y par rapport à x. Comme y est égal à $f(x)$, cette dérivée est $f'(x)$. On a donc

$$1 = \mathrm{F}'(y).f'(x);$$

d'où on tire, en premier lieu,

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{F}'(y)}. \tag{8}$$

Prenons de nouveau la dérivée par rapport à x en considérant encore le second membre comme une fonction de y, qui est lui-même fonction de x; c'est-à-dire en prenant la dérivée par rapport à y, et multipliant par celle $f'(x)$ de y relative à x. Il vient par là

$$f''(x) = -\frac{\mathrm{F}''(y)}{\mathrm{F}'^2(y)}.f'(x),$$

ou, d'après la valeur précédente,

$$f''(x) = -\frac{F''(y)}{F'^3(y)}.$$

Prenant encore la dérivée de la même manière, il vient

$$f'''(x) = -\frac{F'^3(y)\,F'''(y) - F''(y).3F'^2(y)F''(y)}{F'^6(y)} f'(x),$$

ou, en réduisant et remplaçant $f'(x)$ par sa valeur,

$$f'''(x) = \frac{3F''^2(y) - F'(y)F'''(y)}{F'^5(y)};$$

et ainsi de suite.

L'expression transformée sera donc

$$\varphi\left[F(y), y, \frac{1}{F'(y)}, -\frac{F''(y)}{F'^3(y)}, \frac{3F''^2(y) - F'(y)F'''(y)}{F'^5(y)}, \ldots\right]$$

60. *Théorème des fonctions inverses.* — L'équation (8) donne, en remplaçant y par sa valeur,

$$f'(x) = \frac{1}{F'[f(x)]},$$

et peut s'énoncer de la manière suivante : La dérivée d'une fonction f inverse de F s'obtient en divisant l'unité par la dérivée F′ de la fonction directe et remplaçant dans cette dérivée la variable par la fonction inverse f.

Exemple I. — Posons d'abord

$$F(x) = \operatorname{tang} x,$$

$$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x,$$

$$\frac{1}{F'(x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x},$$

la fonction inverse est ici

$$f(x) = \text{arc tang}\, x,$$

on trouvera donc sa dérivée en prenant

$$f'(x) = \frac{1}{F'[f(x)]} = \frac{1}{F'(\text{arc tang}\, x)}$$
$$= \frac{1}{1 + \text{tang}^2 \text{arc tang}\, x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Cette formule déjà connue (6, p. 38) sert ainsi de vérification à la méthode.

Exemple II. — Pour obtenir un résultat nouveau, prenons encore

$$F(x) = \text{séc}\, x,$$

on a trouvé (3, p. 29),

$$F'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{1}{F'(x)} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}$$

$$= \frac{1}{\text{séc}\, x \sqrt{\text{séc}^2 x - 1}},$$

la fonction inverse sera

$$f(x) = \text{arc séc}\, x,$$

et nous trouverons pour sa dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{F'[f(x)]} = \frac{1}{F'(\text{arc séc}\, x)}$$
$$= \frac{1}{\text{séc arc séc}\, x \sqrt{\text{séc}^2 \text{arc séc}\, x - 1}} = \frac{+1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

avec le signe positif, car la fonction est croissante.

§ III.

CHANGEMENT DE COORDONNÉES.

61. Je suppose maintenant que les deux variables x et y qui figurent dans une expression

$$\varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\right)$$

où x avait été traitée comme indépendante, doivent disparaître complétement et être remplacées par deux autres r et θ, cette dernière devenant la nouvelle variable indépendante. Il est entendu que l'on donne deux relations pour établir la liaison nécessaire entre x, y et r, θ. La méthode consiste à différentier ces relations et elle est indépendante de leur forme particulière. Je me contenterai donc de faire le calcul sur un exemple, pour fixer les idées.

Je supposerai qu'il s'agisse de transformer des coordonnées rectangulaires x, y, en coordonnées polaires r, θ, ayant même origine et même axe, ce qui fournit les relations

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

Si nous différentions ces équations, il vient

$$(9)\qquad \begin{aligned} dx &= dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta,\\ dy &= dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta; \end{aligned}$$

et en divisant membre à membre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à θ. Il faudra pour cela, dans le premier membre, la prendre par rapport à x qui est fonction de θ, et multiplier par la déri-

vée de x relative à θ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{d\theta}=$$

$$\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)-\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta\right)}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^2}$$

Si nous divisons par $\frac{dx}{d\theta}$ dont nous venons de trouver la valeur (9), le dénominateur se trouve porté au cube. Puis en effectuant toutes les réductions que comporte le numérateur, il vient ([1])

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^3};$$

et ainsi de suite.

L'expression proposée deviendra par là

$$\varphi\left\{r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta},\ \frac{r^2+2\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^3},\ldots\right\}.$$

62. Exemple. — Proposons-nous de transformer la formule suivante

$$\frac{\left\{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

([1]) Les crochets indiquent ici le carré de $\frac{dr}{d\theta}$ pour éviter toute confusion avec une dérivée partielle $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$ dont il n'est en aucune façon question. Cette précaution sera conservée dans toute la suite de ce cours.

Il viendra d'abord

$$\frac{\left\{1+\left[\dfrac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{r^2+2\left[\dfrac{dr}{d\theta}\right]^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta}}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^3}};$$

en second lieu

$$\frac{\left\{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left[\dfrac{dr}{d\theta}\right]^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}},$$

et en effectuant toutes les réductions au numérateur :

$$\frac{\left\{r^2+\left[\dfrac{dr}{d\theta}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left[\dfrac{dr}{d\theta}\right]^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}.$$



LIVRE II.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES SÉRIES.

§ I.

FORMULE DE MACLAURIN.

63. La question que nous nous proposerons ici dans toute sa généralité, consiste à trouver le développement d'une fonction quelconque $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes entières et positives de la variable x. Nous emploierons pour cela une méthode due à Descartes et qu'on appelle *des coefficients indéterminés* (¹).

(¹) Cette méthode est loin d'être irréprochable. J'ai cru cependant devoir l'employer, parce qu'elle fournit la voie la plus naturelle et la plus simple pour parvenir au développement de Maclaurin. Mais comme cette formule est l'une des plus importantes de l'analyse, j'en donnerai plus loin (222) une démonstration entièrement rigoureuse, qui aura, en outre, l'avantage de nous permettre d'arrêter la série à un terme quelconque, en faisant connaître la forme du reste.

Je dois avertir encore que j'ai supprimé tous les développements relatifs à la convergence des séries · non que je méconnaisse leur importance, mais parce que ces détails, peu susceptibles d'être condensés quand on veut les exposer complétement, m'auraient entraîné hors du cadre que je me suis imposé; et que d'ailleurs on les trouve aujourd'hui dans tous les Traités d'Al-

Elle consiste à supposer le développement trouvé sous la forme

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

et à en déterminer les coefficients en se servant des propriétés de la fonction qu'il est destiné à représenter.

Pour connaître le terme indépendant A_0, il suffit de faire $x = 0$ dans cette égalité qui doit subsister pour toutes les valeurs de la variable. On trouve ainsi

$$A_0 = f(0);$$

Pour avoir de suite le terme général, différentions n fois, ce dont nous avons le droit (13), puisque l'égalité a lieu quel que soit x. Dans cette opération les premiers termes disparaissent, car on a vu (44) que les dérivées d'une puissance entière et positive d'un ordre supérieur à son exposant sont toutes nulles. Le premier dont il reste trace sera celui du degré n, car sa $n^{ième}$ dérivée est constante et égale à $1.2.3\ldots n.A_n$. Quant aux termes suivants en x^{n+1}, x^{n+2}, $x^{n+3}, \ldots$, comme la différentiation abaisse leurs exposants de n unités, ils renfermeront encore $x, x^2, x^3, \ldots$

Nous pouvons donc écrire :

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n.A_n + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Si on fait maintenant $x = 0$ dans cette relation qui, comme la première, doit subsister pour toutes les valeurs de la variable, il reste

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots n.A_n,$$

gèbre. Je me borne à prévenir que parmi les séries établies dans ce chapitre, celles de l'exponentielle, du sinus et du cosinus peuvent être employées quelle que soit la variable, les autres séries particulières pour les valeurs moindres que l'unité, et les formules générales de Taylor et de Maclaurin pour des valeurs suffisamment petites dans chaque cas.

on en tire, pour le coefficient du terme général,

$$A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}.$$

En reportant cette valeur dans la formule, elle devient

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots$$

Telle est la série dite de Maclaurin ou de Stirling. Nous sommes ramenés pour son application à former les dérivées successives de la fonction, ce que nous saurons toujours faire, et à y supposer $x = 0$.

La question est ainsi complétement résolue; mais on peut à cet égard distinguer trois cas. Ou bien la fonction est assez simple pour qu'on puisse, comme nous en avons eu des exemples (44), écrire immédiatement sa dérivée d'ordre quelconque. Ou bien, dans l'impossibilité de saisir la forme générale de ces dérivées, on est réduit à calculer un certain nombre des premières, et à y faire $y = 0$. Il se produit alors, en général, des réductions assez notables pour permettre d'apercevoir la loi de formation des résultats purement numériques ainsi obtenus. La série est dans ce cas aussi complétement connue que dans le premier. Ou enfin la fonction est trop compliquée pour qu'on puisse saisir la loi de succession de ses différents termes, et on doit se contenter d'en évaluer un certain nombre. La solution au point de vue analytique est alors beaucoup moins satisfaisante; néanmoins elle fournit encore à la pratique un puissant secours, notamment pour les calculs de la Mécanique céleste.

64. Exemple I. — Considérons d'abord l'exponentielle.

On a trouvé (44)

$$f(x)=e^x,\quad f^{(n)}(x)=e^x,$$

et par suite

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=1.$$

Il vient donc

$$(10)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$$

Si on fait en particulier $x=1$, on obtient la série numérique qui exprime la base du système népérien [1]

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

Exemple II. — Prenons maintenant l'exponentielle à base quelconque (44)

$$f(x)=m^x,\quad f^{(n)}(x)=m^x L^n m,$$
$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=L^n m,$$

en substituant

$$m^x=1+\frac{Lm}{1}x+\frac{L^2 m}{1.2}x^2+\frac{L^3 m}{1.2.3}x^3+\frac{L^4 m}{1.2.3.4}x^4+\cdots$$

Ce développement se déduit du reste du précédent, puisque m^x n'est autre chose que e^{xLm}.

Exemple III. — On a pour le sinus (44)

$$f(x)=\sin x,\quad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}.$$

---

[1] Il n'y a aucun cercle vicieux dans la marche que nous avons suivie; elle ne se base en effet que sur la règle de différentiation de l'exponentielle pour laquelle (14) nous n'avons pas eu à invoquer ce développement qu'on déduit ordinairement de la formule du binôme.

Les coefficients seront les mêmes de quatre en quatre, puisque quatre quadrants équivalent à une circonférence dont l'addition ne change pas la valeur du sinus. Les quatre premiers étant du reste,

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3;$$
$$\sin\frac{n\pi}{2} = 0, \quad 1, \quad 0, -1;$$

on aura pour le développement

$$(11)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Exemple IV. — Prenons enfin le cosinus. On aura de même (44)

$$f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f(0) = 1, \qquad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Les coefficients sont encore périodiques, et comme les quatre premiers ont pour valeurs

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0;$$

le développement devient

$$(12)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

§ II.

FORMULE D'EULER.

65. Développons par la formule (10) la quantité $e^{x\sqrt{-1}}$. Comme les puissances de -1 se reproduisent de quatre en quatre, et ont pour valeurs

$$\sqrt{-1}, \quad -1; \quad -\sqrt{-1}, \quad +1;$$

il viendra

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

ou en groupant les parties réelles et imaginaires,

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \right\}$$
$$+ \sqrt{-1} \left\{ \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \right\}$$

On reconnaît dans la première série le développement (12) du cosinus, et dans la seconde celui (11) du sinus. De là l'équation suivante donnée par Euler :

(13) $$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x.$$

Si on fait en particulier

$$x = 2k\pi;$$

il vient, quel que soit l'entier k positif ou négatif,

(14) $$e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1.$$

Si on fait encore

$$x = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\sqrt{-1}$, on obtient ce symbole remarquable

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

quantité réelle qui a pour valeur 0,207875....

66. *Réciprocité des fonctions exponentielle et trigonométrique.* — La formule d'Euler montre que les fonctions exponentielle et trigonométrique que nous avions considérées comme essentiellement distinctes, se ramènent l'une à l'autre; ou que l'une seulement des deux doit être considérée comme simple. Cette équation nous fournit immédiatement l'expression trigonométrique de l'exponentielle, en changeant x en $-x\sqrt{-1}$,

$$e^x = \cos(x\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\sin(x\sqrt{-1}).$$

Pour évaluer inversement les fonctions trigonométriques en exponentielles, remplaçons successivement dans la formule d'Euler la variable par x et $-x$. Il viendra

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On déduit ensuite de là en divisant membre à membre

$$(15) \quad \tang x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}\,\frac{1 - e^{2x\sqrt{-1}}}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}.$$

Quant à la sécante, la cosécante et la cotangente, on sait qu'elles ont pour expressions les inverses des précédentes.

Il serait facile de ramener de même les fonctions circulaires au logarithme, et réciproquement.

67. *Valeurs multiples du logarithme.* — Considérons

le logarithme d'une quantité imaginaire $x+y\sqrt{-1}$, et cherchons à le ramener à la même forme. Nous poserons pour cela

$$L(x+y\sqrt{-1})=u+v\sqrt{-1},$$

en désignant par u et v des fonctions inconnues de x et y qu'il faut déterminer.

Si nous prenons l'exponentielle des deux membres, il vient (13)

$$x+y\sqrt{-1}=e^{u+v\sqrt{-1}}=e^{u}.e^{v\sqrt{-1}}$$
$$=e^{u}(\cos v+.\sqrt{-1}\sin v)=e^{u}\cos v+\sqrt{-1}\,e^{u}\sin v.$$

Or une égalité qui a lieu entre des quantités réelles et imaginaires, se décompose en deux autres relatives à chacune de ces parties. On a donc

$$(16)\qquad \begin{cases} e^{u}\cos v=x,\\ e^{u}\sin v=y.\end{cases}$$

Pour éliminer d'abord v, ajoutons les carrés, il viendra

$$e^{2u}(\cos^2 v+\sin^2 v)=x^2+y^2,$$

ou simplement

$$e^{2u}=x^2+y^2;$$

j'extrais la racine numérique

$$e^{u}=\sqrt{x^2+y^2};$$

puis je prends dans les Tables le logarithme népérien numérique que je représente, pour cette occasion seulement, par la caractéristique l,

$$u=l\sqrt{x^2+y^2}.$$

En second lieu, divisons membre à membre,

$$\operatorname{tang} v = \frac{y}{x},$$

$$v = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Nous sommes convenus (2, note 5) d'attribuer aux signes d'abréviation des fonctions circulaires une valeur unique, sauf à la compléter par l'addition des multiples convenables de π. En général, quand un arc n'est donné que par sa tangente, on peut lui adjoindre un nombre quelconque de demi-circonférences. Mais ici nous connaissons en outre les signes individuels du cosinus et du sinus de v qui sont ceux de x et de y d'après les équations (16), car e^u est nécessairement positif puisque u est réel. On ne doit plus dès lors ajouter que des circonférences entières, car une demi-circonférence, quoique ne modifiant pas la valeur de la tangente, changerait les deux signes du sinus et du cosinus. La valeur complète de v est donc, en désignant par k un nombre entier quelconque positif ou négatif, qui peut être nul

$$v = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + 2k\pi.$$

68. Si nous substituons maintenant à u et v leurs valeurs, il vient

$$(17) \quad L(x + y\sqrt{-1}) = l\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{-1}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + 2k\pi\right).$$

On voit par là que le logarithme est une fonction essentiellement multiple douée d'une infinité de valeurs, dont la partie réelle est le logarithme numérique du module $\sqrt{x^2+y^2}$, et qui diffèrent les unes des autres par des circonférences imaginaires.

Si nous voulons considérer à part ce qui a lieu pour les quantités réelles, il suffit de faire $y = 0$. L'arc a alors pour

sinus zéro, d'après la seconde des équations (16), c'est-à-dire qu'il est égal à zéro ou à π. On prendra l'une ou l'autre de ces valeurs suivant que x sera positif ou négatif, puisque son signe indique celui du cosinus. On a donc

$$L(+x) = lx + 2k\pi\sqrt{-1},$$
$$L(-x) = lx + (2k+1)\pi\sqrt{-1};$$

c'est-à-dire qu'un nombre positif x a un logarithme réel lx qu'on trouve dans les Tables, et une infinité de logarithmes imaginaires qu'on obtient en lui adjoignant des circonférences imaginaires; et que d'autre part, un nombre négatif n'a que des logarithmes imaginaires qui s'obtiennent en adjoignant au logarithme de la valeur absolue un nombre impair de demi-circonférences imaginaires.

On aura, en particulier, pour $x = 1$,

$$L(+1) = 2k\pi\sqrt{-1},$$
$$L(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Les logarithmes de l'unité sont donc des nombres pairs ou impairs de demi-circonférences imaginaires, suivant qu'elle est positive ou négative.

§ III.

FORMULE DE MOIVRE.

69. Élevons les deux membres de la formule d'Euler à une puissance de degré quelconque n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = e^{nx\sqrt{-1}}.$$

Remplaçons-y d'autre part x par nx,

$$\cos nx + \sqrt{-1}\,\sin nx = e^{nx\sqrt{-1}}.$$

Le résultat étant le même dans les deux cas, il s'ensuit

$$(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\,\sin nx.$$

Cette égalité, due à Moivre, se trouve ainsi établie pour un exposant quelconque. Elle nous apprend que pour élever à une puissance un binôme de la forme $\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$, il suffit de multiplier par l'exposant l'*argument* x de ce binôme.

70. *Équation binôme.* — On appelle ainsi celle qui ne renferme qu'un seul terme en x sous la forme,

$$x^n = a + b\sqrt{-1}.$$

On peut écrire ainsi le second membre

$$x^n = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{-1}\,\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

en ne prenant que la valeur positive du radical. Si on remarque que les deux coefficients ont maintenant une somme de carrés égale à l'unité, il s'ensuit qu'on peut les considérer comme le cosinus et le sinus d'un même arc. La tangente de cet arc sera dès lors le quotient de ces coefficients, et on pourra le désigner par $\text{arc tang}\,\frac{b}{a}$, ou plus généralement $\text{arc tang}\,\frac{b}{a} + 2k\pi$. Nous devons encore n'ajouter que des circonférences entières, car nous connaissons non-seulement la tangente, mais en outre les signes du sinus et du cosinus qui sont ceux de b et a, puisque le radical est pris positivement.

On aura par là

$$x^n = \sqrt{a^2+b^2}\left[\begin{array}{c}\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{b}{a}+2k\pi\right)\\ +\sqrt{-1}\sin\left(\text{arc tang}\,\frac{b}{a}+2k\pi\right)\end{array}\right].$$

Si nous extrayons maintenant la racine $n^{ième}$, d'après la formule de Moivre, il vient

$$x = \sqrt[2n]{a^2+b^2}\left\{\begin{array}{c}\cos\left(\frac{\text{arc tang}\,\frac{b}{a}+2k\pi}{n}\right)\\ +\sqrt{-1}\sin\left(\frac{\text{arc tang}\,\frac{b}{a}+2k\pi}{n}\right)\end{array}\right\}.$$

Grâce à la préparation que nous avons fait subir à l'équation proposée, cette formule résout la question en fournissant n valeurs distinctes de x et seulement n qui y satisfont. En effet, le premier facteur ne représente que la racine numérique d'ordre $2n$ de la quantité essentiellement positive a^2+b^2. Quant au second, il recevra d'abord n valeurs distinctes, lorsque k sera remplacé par $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$; car par cette substitution nous formons une série d'arcs en progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, et dont le dernier terme n'atteint pas encore la circonférence entière. Or deux de ces arcs ne peuvent avoir à la fois le même sinus et le même cosinus, au moins avec les mêmes signes. De plus ces valeurs seront seules distinctes, car si on continue à remplacer k par n, $n+1$, $n+2, \ldots$, on retrouve les mêmes arcs avec addition de n fois la raison $\frac{2\pi}{n}$ ou d'une circonférence,

ce qui reproduit les mêmes sinus et cosinus. Il en serait de même pour les valeurs négatives de k.

Pour considérer en particulier une équation dont le second membre soit réel et positif

$$x^n = a,$$

il suffit de faire $b = 0$. L'argument arc tang $\frac{b}{a}$ s'annule, et on a simplement

$$x = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Si le second membre est négatif

$$x^n + a = 0,$$

l'argument doit être pris alors égal à π (68), et on a

$$x = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

On obtient en particulier, en faisant $a = 1$, les n valeurs de la racine $n^{ième}$ de l'unité positive

$$(18)\qquad \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

L'une d'elles est toujours réelle et égale à 1, on l'obtient en faisant $k = 0$. On a de même pour celles de l'unité négative

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Si le degré n est impair, on peut faire $k = \frac{n-1}{2}$; d'où $2k + 1 = n$, et on obtient encore une racine réelle égale à -1. Si le degré est pair, on n'a que des valeurs imaginaires.

On appelle équation *trinôme* celle qui peut se ramener à la forme

$$x^{2n} + px^n + q = 0.$$

En prenant comme inconnue auxiliaire la quantité x^n, on est ramené à une équation du second degré dont la résolution donnera pour x^n une expression de la forme $a + b\sqrt{-1}$; il suffira alors, pour achever la résolution, d'appliquer la méthode précédente. On appelle de même équations *polynômes*, celles qui sont composées avec x^n comme le sont avec x les équations du troisième, du quatrième degré et les équations particulières qu'on sait résoudre dans les degrés supérieurs. Cette même méthode permettra d'en effectuer la résolution complète.

71. *Sections angulaires.* — Développons la formule de Moivre par celle du binôme de Newton qui sera bientôt établie pour un exposant quelconque (76).

$$\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx = \cos^n x + n\sqrt{-1}\cos^{n-1}x\sin x$$
$$-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sqrt{-1}\cos^{n-3}x\sin^3 x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x + \cdots$$

Si nous égalons séparément les parties réelles et imaginaires, il viendra

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \cdots, \\
&\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}x\sin^5 x + \cdots
\end{aligned}\right.$$

En divisant membre à membre, nous obtiendrons la valeur de $\operatorname{tang} nx$. Si de plus nous divisons les deux termes de la fraction par $\cos^n x$, nous les réduirons à ne renfermer que $\operatorname{tang} x$. On a ainsi

$$\operatorname{tang} nx = \frac{n \operatorname{tang} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{tang}^3 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tang}^5 x - \dots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2} \operatorname{tang}^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \operatorname{tang}^4 x - \dots}.$$

Si l'on a en vue le problème de la multiplication des arcs, n sera un nombre entier, bien entendu positif. Il est clair alors qu'en poussant suffisamment loin les développements, on rencontre un facteur $n - n$ qui en fait disparaître tout le surplus. On obtient ainsi des expressions terminées. Si, par exemple, on fait $n = 2$, on retrouve immédiatement les valeurs bien connues que fournit la trigonométrie élémentaire pour le problème de la duplication des angles.

Si on se propose, au contraire, la subdivision des arcs, n devient un nombre fractionnaire et la soustraction des entiers successifs ne donnera jamais un facteur nul. Les séries sont alors illimitées : c'est ce qui aurait lieu, par exemple, pour le problème de la trisection de l'angle, si on faisait $n = \frac{1}{3}$.

72. *Série circulaire*. — Écrivons la seconde des formules (19) de la manière suivante :

$$x \cdot \frac{\sin nx}{nx} = \cos^{n-1} x \sin x - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-2} x \sin^2 x$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots,$$

et faisons tendre n vers zéro. On sait que le rapport $\frac{\sin nx}{nx}$ prend alors une valeur déterminée, égale à l'unité, comme

nous aurons du reste bientôt occasion de le démontrer (24, p 128). En faisant également $n=0$ dans le second membre, il vient

$$x = \frac{\tang x}{1} - \frac{\tang^3 x}{3} + \frac{\tang^5 x}{5} - \frac{\tang^7 x}{7} + \ldots,$$

et en remplaçant pour plus de facilité x par arc tang x :

(20) $$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si on fait en particulier $x=1$, on obtient la série numérique

(21) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$

Ce développement, dû à Leibnitz, fournit la valeur du rapport de la circonférence au diamètre.

§ IV.

FORMULE DE TAYLOR.

73. La démonstration que nous avons donnée de la formule de Maclaurin supposait gratuitement la possibilité du développement. Si donc la nature particulière d'une fonction s'oppose à ce qu'on puisse lui donner cette forme, on doit s'attendre à trouver un résultat inadmissible. Si par exemple, on se proposait de développer Lx en série, il faudrait recourir à la $n^{ième}$ dérivée qui contient (44) le facteur $\pm \frac{1}{x^n}$, et y faire $x=0$. On aurait alors $\pm\infty$. D'après cela le développement deviendrait $\infty - \infty + \infty - \infty + \ldots$, c'est-à-dire qu'il prendrait une forme complétement illusoire.

On peut dans ces cas exceptionnels tourner la difficulté en employant une formule plus générale due à Taylor.

74. Pour la trouver, posons

$$f(x) = F(x+a),$$

a désignant une constante arbitraire. On en tire

$$f'(x) = F'(x+a).\frac{d(x+a)}{dx} = F'(x+a);$$

et de même

$$f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x+a),$$

d'où, en faisant $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = F^{(n)}(a).$$

Le développement devient, par conséquent,

$$(22)\left\{\begin{aligned} F(x+a) = F(a) &+ \frac{F'(a)}{1}x + \frac{F''(a)}{1.2}x^2 + \frac{F'''(a)}{1.2.3}x^3 + \ldots \\ &+ \frac{F^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Telle est la série de Taylor. Elle comprend évidemment celle de Maclaurin pour le cas où on fait $a = 0$. Cette formule a deux applications principales. On peut s'en servir d'abord pour exprimer l'accroissement fini $F(a+x) - F(a)$ que reçoit une fonction F, lorsque sa variable actuellement égale à a subit l'augmentation finie x. On s'en sert aussi pour obtenir le développement d'une fonction F envisagée par rapport à $x + a$, en série ordonnée suivant les puissances croissantes entières et positives de x, lorsque la formule plus simple de Maclaurin est en défaut pour développer $F(x)$ elle-même. C'est à ce point de vue que nous là considérerons ici.

75. *Série logarithmique.* — Reprenons la fonction Lx, et pour la développer le plus simplement possible, faisons

$a = 1$. On aura (44)

$$F(x) = Lx, \quad F^{(n)}(x) = -\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(-x)^n},$$

$$F(1) = L1 = 0, \quad F^{(n)}(1) = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(-1)^{n-1}}.$$

On tire de-là, pour la valeur du coefficient général,

$$\frac{F^{(n)}(1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

et par suite

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots.$$

Cette série forme le point de départ de toutes celles qu'on a établies sous des formes plus ou moins commodes pour le calcul numérique des Tables de logarithmes.

76. *Binôme de Newton.* — Considérons encore la puissance x^m d'exposant quelconque. S'il est entier et positif, la formule de Maclaurin donne l'identité $x^m = x^m$. S'il est négatif ou fractionnaire, la différentiation amène au bout d'un certain temps à des quantités de la forme $\pm \frac{A}{x^k}$ qui, pour $x = 0$, conduisent de nouveau à la forme illusoire $\infty - \infty + \infty - \ldots.$

Nous aurons donc recours à la série de Taylor, en faisant encore pour plus de facilité $a = 1$. On a trouvé (44)

$$F(x) = x^m, \quad F^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$$

$$F(1) = 1, \quad F^{(n)}(1) = m(m-1)\ldots(m-n+1);$$

et par suite

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots.$$

Telle est la formule dite du *binôme de Newton* [1]. Lorsque l'exposant sera entier et positif, ce développement s'arrêtera à cause du facteur $m-m=0$ qui finira par s'introduire. Lorsqu'il sera fractionnaire, on franchira le facteur zéro, mais on ne le rencontrera pas. Si enfin il est négatif, les quantités $m-1$, $m-2$, ..., s'éloigneront de plus en plus de zéro et ne l'introduiront pas non plus. Ainsi dans ces deux cas on obtiendra une série illimitée.

La formule de Newton sert à ce point de vue à effectuer algébriquement des divisions et des extractions de racines. J'en donnerai un exemple qui nous sera utile par la suite :

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}(-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}(-x^2)^3 + \ldots,$$

ou en réduisant

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \\ &+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

série dont la loi de formation est évidente.

---

[1] Nous l'établissons ainsi directement pour un exposant quelconque, sans faire de cercle vicieux et sans recourir à la théorie des combinaisons, comme je l'ai fait remarquer (**15**, note). Pour en déduire la forme employée ordinairement dans le cas de l'exposant entier et positif, il suffit de poser $\frac{b}{a} = x$ et de multiplier par a^m, ce qui donne

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \ldots.$$

§ V.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

77. On peut étendre la formule de Taylor à des fonctions de plusieurs variables $f(x, y, z, \ldots)$, et développer $f(x+a,\ y+b,\ z+c, \ldots)$ suivant les puissances de $x, y, z, \ldots$.

Désignons pour cela par t une variable auxiliaire et posons

$$u = tx + a, \quad v = ty + b, \quad w = tz + c, \quad \ldots,$$

d'où

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = x, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right) = y, \quad \left(\frac{dw}{dt}\right) = z, \ldots.$$

Si nous considérons la fonction

$$F(t) = f(u, v, w, \ldots),$$

il est clair que pour $t = 1$; $u, v, w, \ldots$, deviennent $x + a$, $y + b$, $z + c, \ldots$, et par suite que $F(1)$ se réduit à l'expression proposée. Or, si on développe $F(t)$ par la série de Maclaurin et qu'on y fasse $t = 1$, il vient

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} + \frac{F''(0)}{1.2} + \frac{F'''(0)}{1.2.3} + \ldots.$$

Il suffit donc de calculer ces divers coefficients.

Nous aurons pour cela, en considérant f comme une fonction composée de t (5, p. 33),

$$F'(t) = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dw}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right) + \ldots$$
$$= x\left(\frac{df}{du}\right) + y\left(\frac{df}{dv}\right) + z\left(\frac{df}{dw}\right) + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire symboliquement (54)

$$F'(t) = \left\{ x\left(\frac{d}{du}\right) + y\left(\frac{d}{dv}\right) + z\left(\frac{d}{dw}\right) + \cdots \right\} f(u, v, w, \ldots).$$

La différentiation par rapport à t s'effectue donc en multipliant l'expression à différentier par ce facteur symbolique. Par suite n différentiations consécutives n'auront d'autre effet que d'élever ce facteur à la puissance n. On aura ainsi immédiatement

$$F^{(n)}(t) = \left\{ x\left(\frac{d}{du}\right) + y\left(\frac{d}{dv}\right) + z\left(\frac{d}{dw}\right) + \cdots \right\}^n f(u, v, w, \ldots).$$

Si maintenant nous faisons $t = 0$; $u, v, w, \ldots$, se réduisent à $a, b, c, \ldots$, et il vient

$$F^{(n)}(0) = \left\{ x\left(\frac{d}{da}\right) + y\left(\frac{d}{db}\right) + z\left(\frac{d}{dc}\right) + \cdots \right\}^n f(a, b, c, \ldots),$$

formule qui donne tous les termes de la série.

Nous aurons donc, en conservant pour abréger la forme symbolique

$$\begin{aligned} f(x+a, y+b, z+c, \ldots) &= f(a, b, c, \ldots) \\ &+ \frac{1}{1}\left\{ x\left(\frac{d}{da}\right) + y\left(\frac{d}{db}\right) + z\left(\frac{d}{dc}\right) + \cdots \right\} f(a, b, c, \ldots) \\ &+ \frac{1}{1.2}\left\{ x\left(\frac{d}{da}\right) + y\left(\frac{d}{db}\right) + z\left(\frac{d}{dc}\right) + \cdots \right\}^2 f(a, b, c, \ldots) \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\left\{ x\left(\frac{d}{da}\right) + y\left(\frac{d}{db}\right) + z\left(\frac{d}{dc}\right) + \cdots \right\}^3 f(a, b, c, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On peut condenser encore davantage l'écriture en se reportant à la série exponentielle (10, p. 84). On aura, en

effet, en l'envisageant à un point de vue purement symbolique (¹),

$$f(x+a, y+b, z+c, \ldots) = e^{x\left(\frac{d}{da}\right)+y\left(\frac{d}{db}\right)+z\left(\frac{d}{dc}\right)+\ldots} \cdot f(a, b, c, \ldots).$$

Si on considère en particulier une fonction de deux variables x, y, on aura, en dégageant complétement la série des conventions précédentes,

$$f(x+a, y+b) = f(a, b)$$

$$+\frac{1}{1}\left\{\begin{aligned} & x\left(\frac{df}{da}\right) \\ & +y\left(\frac{df}{db}\right)\end{aligned}\right. + \frac{1}{1.2}\left\{\begin{aligned} & x^2\left(\frac{d^2f}{da^2}\right) \\ & +\frac{2}{1}xy\left(\frac{d^2f}{da\,db}\right) \\ & +y^2\left(\frac{d^2f}{db^2}\right)\end{aligned}\right. + \frac{1}{1.2.3}\left\{\begin{aligned} & x^3\left(\frac{d^3f}{da^3}\right) \\ & +\frac{3}{1}x^2y\left(\frac{d^3f}{da^2\,db}\right) \\ & +\frac{3}{1}xy^2\left(\frac{d^3f}{da\,db^2}\right) \\ & +y^3\left(\frac{d^3f}{db^3}\right)\end{aligned}\right. + \frac{1}{1.2.3.4}\left\{\begin{aligned} & x^4\left(\frac{d^4f}{da^4}\right) + \ldots\ldots \\ & +\frac{4}{1}x^3y\left(\frac{d^4f}{da^3\,db}\right) \\ & +\frac{4.3}{1.2}x^2y^2\left(\frac{d^4f}{da^2\,db^2}\right) \\ & +\frac{4}{1}xy^3\left(\frac{d^4f}{da\,db^3}\right) \\ & +y^4\left(\frac{d^4f}{db^4}\right)\end{aligned}\right.$$

Si on fait en particulier $a = 0$, $b = 0$, $c = 0, \ldots$, dans la formule générale, on obtiendra l'extension de la formule de Maclaurin, ou le développement d'une fonction quelconque $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances de ses variables.

(¹) On a donné, sous le nom de *calcul des opérations*, un grand développement à cette manière d'envisager des formules, comme permettant d'en retrouver d'autres par un simple mécanisme d'opérations à effectuer sur des caractères qui ne représentent pourtant aucune espèce de grandeurs. On n'y doit voir qu'un moyen de mnémonique. Il exige dans son emploi de grandes précautions; mais il a souvent rendu à l'analyse de véritables services.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES MAXIMA.

§ I.

FONCTIONS EXPLICITES.

78. On appelle *maximum* ou *minimum* d'une fonction, non pas la plus grande ou la plus petite des valeurs qu'elle est susceptible de prendre, mais celles à partir desquelles elle cesse de croître pour décroître, ou de décroître pour croître de nouveau, en un mot ses *changements de sens*. Une fois ceux-ci déterminés, rien de plus simple que d'y choisir la plus grande et la plus petite valeur, qu'on appelle quelquefois *maximum maximorum* et *minimum minimorum*.

79. Soit $f(x)$ une fonction qui pour la valeur a de sa variable atteint un maximum $f(a)$. Si on considère une valeur voisine au delà $f(a+\alpha)$, ou en deçà $f(a-\alpha)$, elles seront toutes deux moindres que $f(a)$, et par conséquent la différence

$$\Delta = f(a) - f(a \pm \alpha)$$

sera positive dans les deux cas. En raisonnant de même pour un minimum, on verrait que cette différence doit avoir le signe négatif, quel que soit encore celui de α. Ainsi le caractère d'un changement de sens est que le signe de Δ soit indépendant de celui de α. C'est ensuite ce signe qui

fixe la nature du changement de sens :

$$\Delta > 0, \text{ maximum},$$
$$\Delta < 0, \text{ minimum}.$$

Or si nous remplaçons, dans la formule de Taylor (22, p. 97) x par $\pm\alpha$, en observant que le double signe se conserve dans les puissances impaires et donne un résultat positif dans les puissances paires, il viendra

$$f(a\pm\alpha)=f(a)\pm\frac{f'(a)}{1}\alpha+\frac{f''(a)}{1.2}\alpha^2$$
$$\pm\frac{f'''(a)}{1.2.3}\alpha^3+\frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}\alpha^4\pm\ldots.$$

Nous pouvons en déduire la différence qui nous intéresse

$$\Delta=\mp\frac{f'(a)}{1}\alpha-\frac{f''(a)}{1.2}\alpha^2\mp\frac{f'''(a)}{1.2.3}\alpha^3-\frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}\alpha^4\mp\ldots$$

80. Actuellement pour profiter des simplifications que comporte la méthode infinitésimale, supposons α infiniment petit, les termes d'ordre supérieur deviennent négligeables devant le premier, et il reste

$$\Delta=\mp f'(a).\alpha.$$

Le double signe étant en évidence, la condition que Δ en soit indépendant exige que ce terme soit rigoureusement nul ou qu'on ait

$$f'(a)=0.$$

Ainsi les seules valeurs de la variable qui puissent correspondre à un changement de sens sont les racines de l'équation dérivée.

Comme le terme du premier ordre disparaît alors, nous ne sommes plus autorisés à supprimer devant lui le second ;

mais le troisième et les suivants continuent d'être négligeables, et il vient

$$\Delta = -\frac{f''(a)}{1.2}\alpha^2.$$

Le signe de Δ est bien alors le même dans les deux cas. Comme il est opposé à celui de $f''(a)$, il s'ensuit qu'on aura pour

$$f''(a) < 0, \text{ maximum} = f(a),$$
$$f''(a) > 0, \text{ minimum} = f(a).$$

81. Il n'y aura de doute que si on a précisément

$$f''(a) = 0.$$

Le second terme disparaissant par là, le troisième doit être conservé

$$\Delta = \mp\frac{f'''(a)}{1.2.3}\alpha^3,$$

et comme le double signe reparaît, il faut encore que la condition suivante soit satisfaite :

$$f'''(a) = 0,$$

auquel cas le quatrième terme ne peut plus être négligé

$$\Delta = -\frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}\alpha^4,$$

et donne comme tout à l'heure pour

$$f^{\text{IV}}(a) < 0, \text{ maximum} = f(a),$$
$$f^{\text{IV}}(a) > 0, \text{ minimum} = f(a).$$

Si on avait encore $f^{\text{IV}}(a) = 0$, on verrait de même qu'il est nécessaire que $f^{\text{V}}(a) = 0$, et ce serait alors le signe de $f^{\text{VI}}(a)$ qui trancherait la question.

En résumé, les seules valeurs de la variable qui correspondent à des changements de sens, sont les racines de l'équation dérivée. Pour décider entre elles, on les substituera dans les dérivées suivantes, et on ne devra conserver que celles pour lesquelles la première dérivée qui ne s'annule pas, soit d'ordre pair. Elles correspondront alors à un maximum ou à un minimum, suivant que le signe de cette dérivée sera négatif ou positif.

82. Exemple I. — Considérons le trinôme du second degré

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + px + q, \\ f'(x) = 2x + p, \\ f''(x) = 2. \end{cases}$$

Posant l'équation dérivée

$$f'(a) = 2a + p = 0,$$

nous en tirons

$$a = -\frac{p}{2};$$

formant la valeur de la seconde dérivée, nous avons

$$f''(a) = f''\left(-\frac{p}{2}\right) = 2 > 0,$$

et, par suite,

$$\text{minimum} = f(a) = a^2 + pa + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}.$$

Ainsi le trinôme du second degré n'est susceptible que d'un minimum, et il l'atteint lorsque la variable est moyenne arithmétique entre les deux racines.

Si celles-ci sont égales, ce minimum est zéro et s'obtient pour la racine elle-même.

83. Exemple II. — Étudions de même le polynôme du troisième degré

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + px^2 + qx + r, \\ f'(x) = 3x^2 + 2px + q, \\ f''(x) = 6x + 2p, \end{cases}$$

l'équation dérivée donne

$$3a^2 + 2pa + q = 0,$$

$$a = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3};$$

en distinguant les racines, on aura pour l'une

$$a_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{p^2 - 3q} - p),$$

$$f''(a_1) = 2\sqrt{p^2 - 3q} > 0,$$

$$\text{minimum} = f(a_1) = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 - \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{\frac{3}{2}},$$

et pour l'autre

$$a_2 = -\frac{1}{3}(\sqrt{p^2 - 3q} + p),$$

$$f''(a_2) = -2\sqrt{p^2 - 3q} < 0,$$

$$\text{maximum} = f(a_2) = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 + \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut encore la condition

$$p^2 - 3q > 0.$$

Dans le cas particulier où on aurait

$$p^2 = 3q,$$

il viendrait

$$a_1 = a_2 = -\frac{p}{3}.$$

Or dans ce cas

$$f''\left(-\frac{p}{3}\right)=0.$$

Il serait donc nécessaire que la troisième dérivée s'annulât; mais comme elle a pour valeur fixe

$$f'''(x)=6,$$

il s'ensuit qu'il n'y a alors aucun changement de sens.

84. Exemple III. — Considérons l'expression transcendante

$$\begin{cases} f(x)=e^x+e^{-x}, \\ f'(x)=e^x-e^{-x}, \\ f''(x)=e^x+e^{-x}, \end{cases}$$

nous posons

$$e^a-e^{-a}=0,$$
$$e^{2a}=1,$$
$$a=0;$$

en ne prenant que la racine réelle. On a ensuite

$$f''(0)=2>0,$$
$$\text{minimum}=f(0)=2.$$

85. Exemple IV. — Il arrive parfois que l'équation dérivée a une infinité de racines parmi lesquelles on est obligé de distinguer plusieurs séries. Soit, par exemple,

$$\begin{cases} f(x)=\sin x, \\ f'(x)=\cos x, \\ f''(x)=-\sin x, \end{cases}$$

nous posons

$$\cos a=0,$$
$$a=\frac{2k+1}{2}\pi;$$

mais on peut distinguer parmi les nombres impairs ceux qui sont des multiples de 4 augmentés ou diminués d'une unité. Je prendrai d'abord

$$a_1 = \frac{4k+1}{2}\pi,$$

$$f''(a_1) = -\sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0,$$

$$\text{maximum} = f(a_1) = \sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = 1,$$

et en second lieu

$$a_2 = \frac{4k-1}{2}\pi,$$

$$f''(a_2) = -\sin\left(\frac{4k-1}{2}\pi\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0,$$

$$\text{minimum} = f(a_2) = \sin\left(\frac{4k-1}{2}\pi\right) = -1.$$

86. Exemple V. — Considérons une puissance entière et positive

$$\begin{cases} f(x) = x^m, \\ f'(x) = mx^{m-1}, \\ f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \end{cases}$$

l'équation dérivée est

$$ma^{m-1} = 0,$$
$$a = 0,$$

et on a

$$f''(0) = 0.$$

Il faut donc recourir aux dérivées supérieures. Or toutes contiennent x en facteur et s'annulent pour la valeur zéro à l'exception de la $m^{\text{ième}}$ (44, V),

$$f^m(x) = 1.2.3\ldots\ldots m > 0.$$

Si donc le degré est impair, il n'y a pas de changement de sens. S'il est pair, on a un minimum qui correspond à $x = 0$ et est lui-même égal à zéro.

Ce résultat est facile à vérifier, car si x va en décroissant, les puissances impaires deviennent négatives avec x et ne changent pas de sens en passant par zéro; mais les puissances paires redeviennent positives et croissantes, et atteignent, par suite, un minimum pour $x = 0$.

87. Exemple VI. — Dans certains cas particuliers, on peut trouver les changements de sens d'expressions où figurent des fonctions arbitraires. Soit, par exemple,

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}\left(\frac{m}{x}\right),\\ f'(x) &= \mathrm{F}'(x) - \frac{m}{x^2}\mathrm{F}'\left(\frac{m}{x}\right),\\ f''(x) &= \mathrm{F}''(x) + \frac{m^2}{x^4}\mathrm{F}''\left(\frac{m}{x}\right) + \frac{2m}{x^3}\mathrm{F}'\left(\frac{m}{x}\right).\end{aligned}\right.$$

L'équation dérivée

$$\mathrm{F}'(a) - \frac{m}{a^2}\mathrm{F}'\left(\frac{m}{a}\right) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$a\mathrm{F}'(a) = \frac{m}{a}\mathrm{F}'\left(\frac{m}{a}\right).$$

Elle sera évidemment satisfaite si l'on prend

$$a = \frac{m}{a}, \quad a = \pm\sqrt{m}.$$

Ainsi donc l'expression aura au moins deux changements de sens, qu'elle atteindra quand la variable sera en valeur

absolue la racine de la constante. Leurs valeurs seront

$$2F(\sqrt{m}), \quad 2F(-\sqrt{m});$$

et leur nature indiquée par le signe de l'expression

$$F''(\pm\sqrt{m}) \pm \frac{1}{\sqrt{m}} F'(\pm\sqrt{m}).$$

Si, par exemple, on a

$$f(x) = x + \frac{m}{x}; \quad F(x) = x, \quad F'(x) = 1, \quad F''(x) = 0;$$

en ne prenant que la solution positive, la dernière expression est elle-même positive et indique un minimum $2\sqrt{m}$. Ainsi quand deux nombres ont un produit constant, leur somme devient minimum lorsqu'ils sont égaux. En d'autres termes, le carré est, de tous les rectangles de même surface, celui qui a le moindre contour.

§ II.

FONCTIONS IMPLICITES.

88. *Fonctions données par une équation.* — Supposons, en premier lieu, une fonction donnée par une équation non résolue, et proposons-nous d'en trouver les changements de sens. Je désigne cette fonction par y et la variable par x.

Si on imagine l'équation résolue, elle donnera pour y une certaine fonction de x, et la règle précédente nous conduira à poser

$$dy = 0.$$

Par conséquent, il suffit de combiner cette relation avec la proposée, car celle-ci est équivalente à l'équation résolue

que nous ne possédons pas. Mais pour obtenir la différentielle dy de la fonction implicite y, il faudrait (27) différentier la proposée, et en tirer dy. Comme le seul usage que nous ayons à faire ici de cette valeur, est de l'égaler à zéro, il vaut autant introduire l'hypothèse $dy = 0$ dans l'équation différentiée, mais non encore résolue par rapport à dy. Mais cela fait disparaître toute la partie qui avait été obtenue en considérant y comme variable et qu'on s'est ainsi donné inutilement la peine de calculer.

Donc, en résumé, il suffit de différentier l'équation proposée *en traitant comme une constante la fonction dont on cherche les changements de sens*, de joindre la relation ainsi obtenue à la proposée et d'éliminer entre elles x et y. Les valeurs de x seront celles qui correspondent aux changements de sens de la fonction, celles de y seront ces changements de sens eux-mêmes. Pour en discerner la nature, on aura toujours la ressource de calculer la seconde dérivée d'après la méthode connue (45) et d'en examiner le signe. Mais il sera ordinairement plus simple de profiter dans chaque cas de caractères particuliers.

89. Exemple. — Soit l'équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 = m,$$

dans laquelle on peut toujours regarder m comme positif. L'équation dérivée en traitant y comme une constante sera

$$by + 2cx = 0.$$

L'élimination donne facilement

$$x = \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}, \quad y = \mp 2\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}.$$

On a ainsi deux changements de sens. Pour en recon-

naître la nature, remarquons que l'équation représente une conique qui a son centre à l'origine. Si on a d'abord

$$4ac > b^2,$$

cette courbe est une ellipse, l'ordonnée positive est plus grande que les voisines, et on a par suite

$$x = -\frac{b}{c}\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}, \quad \text{Maximum} = +2\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}},$$

$$x = +\frac{b}{c}\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}, \quad \text{Minimum} = -2\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}.$$

Si, au contraire, on a à la fois

$$4ac < b^2, \quad c < 0,$$

la courbe est une hyperbole qui a son centre à l'origine et qui ne rencontre pas l'axe des x, car leurs intersections seraient données par la formule imaginaire

$$x = \pm\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Elle a par suite deux tangentes horizontales, car il y a toujours dans l'hyperbole deux tangentes parallèles à tout diamètre qui ne rencontre pas la courbe. L'ordonnée positive est moindre que les voisines et on a

$$x = +\frac{b}{c}\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}, \quad \text{Maximum} = -2\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}},$$

$$x = -\frac{b}{c}\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}, \quad \text{Minimum} = +2\sqrt{\frac{mc}{4ac - b^2}}.$$

Si enfin on a

$$4ac < b^2, \quad c > 0,$$

les valeurs sont imaginaires et il n'y a pas de changement de

sens; ce qui tient à ce que la courbe est alors une hyperbole qui coupe l'axe des x et qui n'a plus de tangentes horizontales.

90. *Fonctions données par un système d'équations.* — Supposons, en second lieu, une fonction donnée par un système d'équations non résolues. Je désignerai par x la variable, par y la fonction dont on cherche les changements de sens, et par $z, u, v, \ldots$, les fonctions auxiliaires. On a en tout $n+1$ quantités liées par n équations.

Si on supposait l'élimination effectuée et y représenté par une fonction de x, la méthode consisterait encore à poser

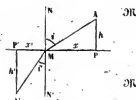
$$dy = 0,$$

pour en déduire x. Or nous savons trouver dy sans faire l'élimination (30); et pour cela il faut différentier les équations proposées. Mais comme le seul usage que nous ayons à faire de dy est de l'annuler, il sera plus court d'introduire cette condition dans l'opération même, en traitant y comme une constante. Dès lors les n équations différentielles contiendront au premier degré les n différentielles dx; dz, $du, dv, \ldots$; ou les $n-1$ dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$, si on divise partout par dx. Si donc on élimine ces dérivées, ce qui peut toujours se faire, puisqu'elles entrent au premier degré, on obtiendra une équation de condition. La joignant aux n proposées, on aura $n+1$ relations entre les $n+1$ quantités qu'elles serviront alors à déterminer.

Les valeurs de x ainsi trouvées correspondront aux changements de sens, celles de y seront ces changements de sens eux-mêmes, enfin celles de $z, u, v, \ldots$, seront des valeurs ordinaires dépourvues d'intérêt et qu'il sera souvent inutile de calculer, si l'élimination peut s'effectuer sans cela. Pour discerner la nature de ces changements de sens on pourra recourir à la dérivée seconde (47) ou à des caractères particuliers.

91. Exemple. — Je prendrai comme application un problème que Fermat avait été conduit à se poser d'après certaines vues philosophiques, pour l'explication de la réfraction simple de la lumière. Un point étant susceptible de se mouvoir dans deux milieux $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ séparés par un plan, avec des vitesses constantes représentées par v, v'; quelle route doit-il suivre pour parvenir dans le plus bref délai possible d'un point A à un autre A', en traversant la surface de séparation?

Fig. 2.



Le parcours est évidemment rectiligne dans chacun des deux milieux et la question consiste simplement à trouver le point de passage M. Or on a, pour la durée des deux mouvements uniformes,

$$t = \frac{\mathrm{AM}}{v} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v},$$

$$t' = \frac{\mathrm{A'M}}{v'} = \frac{\sqrt{h'^2 + x'^2}}{v'};$$

par suite, pour le temps total,

$$\mathrm{T} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{h'^2 + x'^2}}{v'},$$

x et x' restant liées par la condition,

$$x + x' = \mathrm{PP'} = \text{const.}$$

Pour appliquer la méthode précédente, nous différentierons ces équations en traitant T comme une constante

$$o = \frac{1}{v}\frac{x\,dx}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{1}{v'}\frac{x'\,dx'}{\sqrt{h'^2+x'^2}},$$

$$dx + dx' = o.$$

La seconde équation

$$dx' = -dx$$

transforme ainsi la première

$$o = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{1}{v'}\frac{x'}{\sqrt{h'^2+x'^2}} = \frac{1}{v}\cdot\frac{\text{MP}}{\text{MA}} - \frac{1}{v'}\frac{\text{MP}'}{\text{MA}'}$$

$$= \frac{\cos \text{AMP}}{v} - \frac{\cos \text{A}'\text{MP}'}{v'} = \frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'} = \text{const.}$$

On obtient ainsi la loi de la réfraction ordinaire.

Cette solution correspond à un minimum, car la nature de la question ne comporte évidemment pas de maximum.

§ III.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

92. *Fonctions explicites.* — Considérons en premier lieu une fonction explicite de plusieurs variables

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

et proposons-nous de trouver ses changements de sens. Je

supposerai un maximum, uniquement pour fixer le langage.

Soient a, b, c,..., un système de valeurs qui se rapportent à un maximum. La quantité correspondante

$$U = f(a, b, c, \ldots),$$

sera plus grande que toutes celles qui l'entourent, quelque système de valeurs voisines de a, b, c,..., que nous prenions pour x, y, z,.... Elle sera donc en particulier plus grande que celle que nous obtiendrions en conservant à y, z,..., leurs valeurs b, c,..., et faisant varier x un peu en deçà et un peu au delà de a. Ainsi U est un maximum pour la valeur a, quand on considère u comme une fonction de la seule variable x. A ce titre (80) a satisfait avec les valeurs fixes b, c,..., à l'équation dérivée

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

En raisonnant de même pour les autres variables, nous serons conduits à former les équations dérivées partielles, en nombre égal à celui des variables. Elles pourront donc servir à déterminer les valeurs a, b, c,..., de ces dernières, après quoi on obtiendra U, en les substituant dans l'expression générale.

93. Il restera à savoir si cette valeur correspond réellement à un maximum ou à un minimum, et auquel des deux. Voici la méthode qui permettra de résoudre cette question.

Considérons une valeur de u infiniment voisine de U: $f(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, \ldots)$ dans laquelle α, β, γ,..., désignent des quantités infiniment petites; et développons la différence $U - u$ par la formule de Taylor (77). Nous remarquerons que le premier terme disparaît identiquement,

puisque les conditions qui ont déterminé $a, b, c, \ldots$, sont

$$\left(\frac{df}{da}\right)=0, \quad \left(\frac{df}{db}\right)=0, \quad \left(\frac{df}{dc}\right)=0, \ldots$$

Le second subsistera généralement, et tous les autres pourront être négligés vis-à-vis de lui comme étant au moins du troisième ordre infinitésimal. On aura ainsi simplement

$$f(a, b, c, \ldots)-f(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, \ldots)$$
$$=-\left[\begin{array}{c}\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)\alpha^2+\left(\frac{d^2f}{db^2}\right)\beta^2+\left(\frac{d^2f}{dc^2}\right)\gamma^2+\ldots+2\left(\frac{d^2f}{dadb}\right)\alpha\beta \\ +2\left(\frac{d^2f}{dadc}\right)\alpha\gamma+\ldots+2\left(\frac{d^2f}{dbdc}\right)\beta\gamma+\ldots\end{array}\right].$$

On envisagera la quantité placée entre les parenthèses. Si elle ne garde pas un signe fixe, indépendant des signes et des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, le système $a, b, c, \ldots$, doit être rejeté et la valeur U qu'il fournit ne correspond pas à un changement de sens. Si elle garde un signe fixe, U sera un maximum ou un minimum suivant que ce signe sera $-$ ou $+$, car alors la différence placée dans le premier membre aura toujours une valeur positive ou négative.

Si tous les termes étaient identiquement nuls, on serait conduit comme ci-dessus (81) à exiger qu'il en fût de même de toutes les dérivées partielles du troisième ordre. On envisagerait alors la partie du quatrième ordre comme nous venons de le faire pour le second; et ainsi de suite.

94. Il reste donc à montrer comment on pourra trouver les conditions pour qu'un polynôme homogène en $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, garde un signe fixe, qu'on peut toujours supposer positif, puisqu'il suffirait dans l'autre cas de changer le signe de tous les termes. C'est ce que je vais faire pour le second

degré, qui suffit, comme on vient de le voir, dans le cas général.

Je désignerai le polynôme par

$$A\alpha^2 + A'\alpha + A'',$$

A, A′, A″ étant des quantités qui ne renferment pas α. A est une constante absolue, puisque le polynôme est homogène, et elle ne peut être nulle. En effet, si elle l'était, on pourrait disposer de $\beta, \gamma, \ldots$, pour annuler A″ et alors le polynôme se réduisant à $A'\alpha$ changerait de signe avec α. A la vérité on pourrait s'y opposer en faisant encore $A' = 0$, mais α disparaîtrait par là complétement, ce qui est contre l'hypothèse.

On peut donc mettre l'expression sous la forme

$$\frac{1}{A}\left[\left(A\alpha + \frac{A'}{2}\right)^2 + \left(AA'' - \frac{A'^2}{4}\right)\right].$$

Comme on peut disposer de $\beta, \gamma, \ldots$, de manière à annuler la seconde partie, et que la première est essentiellement positive, nous aurons d'abord cette condition nécessaire

$$A > 0.$$

Elle sera suffisante, si on fait en sorte que la seconde partie reste elle-même constamment positive.

Celle-ci ne contient plus α. Elle est encore homogène et peut être mise sous la forme

$$B\beta^2 + B'\beta + B'',$$

B, B′, B″ ne renfermant pas β. On sera conduit comme tout à l'heure à poser

$$B > 0,$$

et à considérer un nouveau trinôme; et ainsi de suite.

On arrivera ainsi à une dernière expression qui, ne devant plus contenir qu'une variable et rester homogène, aura la forme

$$L\lambda^2,$$

ce qui donnera, comme dernière condition,

$$L > 0.$$

95. Considérons, en particulier, le cas de deux variables. On sera conduit au polynôme

$$\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)\alpha^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dadb}\right)\alpha\beta + \left(\frac{d^2f}{db^2}\right)\beta^2.$$

Nous pouvons le mettre sous la forme

$$\frac{1}{\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)}\left\{\begin{array}{c}\left[\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)\alpha + \left(\frac{d^2f}{dadb}\right)\beta\right]^2 \\ + \left[\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)\left(\frac{d^2f}{db^2}\right) - \left(\frac{d^2f}{dadb}\right)^2\right]\beta^2\end{array}\right\}.$$

La condition du changement de sens sera

$$\left(\frac{d^2f}{da^2}\right)\left(\frac{d^2f}{db^2}\right) > \left(\frac{d^2f}{dadb}\right)^2;$$

et il y aura maximum ou minimum suivant que

$$\left(\frac{d^2f}{da^2}\right) < 0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2f}{da^2}\right) > 0,$$

ce qui entraîne en même temps

$$\left(\frac{d^2f}{db^2}\right) < 0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^2f}{db^2}\right) > 0,$$

puisque la condition précédente exige que ces deux quantités soient de même signe.

96. Exemple. — Considérons l'expression

$$u = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$$

et formons les équations dérivées

$$Bb + 2Ca + E = 0,$$
$$2Ab + Ba + D = 0.$$

Elles donnent

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

On a ensuite

$$U = F + \frac{1}{(B^2 - 4AC)^2} \times \left\{ \begin{array}{c} A(2CD - BE)^2 + C(2AE - BD)^2 \\ + B(2AE - BD)(2CD - BE) \\ + (B^2 - 4AC)[D(2CD - BE) + E(2AE - BD)] \end{array} \right\}.$$

Or la parenthèse peut s'écrire de la manière suivante en partageant en deux le troisième terme

$$(2CD - BE)\left[A(2CD - BE) + \frac{B}{2}(2AE - BD)\right]$$
$$+ (2AE - BD)\left[C(2AE - BD) + \frac{B}{2}(2CD - BE)\right]$$
$$+ 2(B^2 - 4AC)[AE^2 + CD^2 - BDE],$$

ou, en effectuant les deux premiers crochets,

$$\left(2AC - \frac{B^2}{2}\right)[D(2CD - BE) + E(2AE - BD)]$$
$$+ 2(B^2 - 4AC)[AE^2 + CD^2 - BDE].$$

On reconnaît alors que le premier crochet est double du

second, ce qui donne, en le mettant en facteur,

$$(B^2 - 4AC)[AE^2 + CD^2 - BDE],$$

et en définitive

$$U = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}.$$

Pour discerner la nature de cette valeur, formons les dérivées secondes

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 2A, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = B, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = 2C.$$

La condition du changement de sens sera (95)

$$B^2 - 4AC < 0;$$

et on aura un maximum ou un minimum suivant que

$$A < 0, \quad \text{ou} \quad A > 0,$$

ce qui entraîne en même temps

$$C < 0, \quad \text{ou} \quad C > 0.$$

97. *Fonctions données par une équation.*—Supposons, en second lieu, une fonction donnée par une équation non résolue. En l'envisageant successivement par rapport à ses diverses variables, ainsi qu'il vient d'être expliqué, et la traitant chaque fois d'après la règle (88) des fonctions d'une seule variable, nous voyons qu'il suffit de former les équations dérivées partielles en considérant la fonction comme une constante. En joignant ensuite ces relations à la proposée, on en aura autant que de quantités à déterminer. Pour discuter la valeur trouvée, on aura recours aux

dérivées du second ordre (55) ou à des caractères particuliers.

98. Exemple. — Soit l'équation

$$(u-m)^2+(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2+\ldots=n,$$

les équations dérivées partielles seront

$$2(a-p)=0,\quad 2(b-q)=0,\quad 2(c-r)=0,\quad \ldots,$$

On en tire

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r,\quad \ldots;$$

et, par suite,

$$U=m\pm\sqrt{n},$$

double valeur qui se décompose en

$$U_1=m+\sqrt{n},\quad U_2=m-\sqrt{n}.$$

La quantité qui a disparu du premier membre par le choix de valeurs de $x, y, z, \ldots$, étant essentiellement positive, il en résulte que le radical a pris par là sa plus grande valeur. Par suite, U_1 est un maximum et U_2 un minimum.

99. *Fonctions données par un système d'équations.* — Soit enfin une fonction de plusieurs variables donnée par un système d'équations non résolues. En n'y envisageant qu'une seule variable et appliquant la règle (90), on obtiendra une équation de condition. En opérant de même pour les autres, on formera autant de conditions que de variables. Or si on a n relations entre m quantités, il y aura $m-n$ variables indépendantes, et par suite $m-n$ conditions. Les joignant aux n proposées, on obtiendra un système de m équations entre ces m quantités.

Les valeurs des variables indépendantes seront celles qui caractérisent le changement de sens. Celle de la fonction principale sera le maximum ou le minimum lui-même. Enfin celles des fonctions auxiliaires, des quantités souvent inutiles qu'on se dispensera de calculer si on le peut. Pour discuter la valeur trouvée, on aura recours aux dérivées du second ordre (56) ou à des caractères particuliers.

100. Exemple. — Proposons-nous de diviser un nombre m en k parties $x, y, z, \ldots, v$, telles que le produit u de puissances déterminées entières ou fractionnaires $p, q, r, \ldots, t$ de ces quantités, soit un maximum.

Nous poserons ici

$$u = x^p y^q z^r \ldots v^t,$$

avec la condition

$$x + y + z + \ldots + v = m;$$

ce qui permettra de considérer v, par exemple, comme une fonction auxiliaire, et $x, y, z, \ldots$, comme des variables indépendantes.

Ne considérons, en premier lieu, que x, puis différentions en traitant u comme une constante, d'après la méthode (90), il viendra

$$0 = px^{p-1} y^q z^r \ldots v^t dx + tx^p y^q z^r \ldots v^{t-1} dv,$$
$$dx + dv = 0.$$

La première de ces équations peut s'écrire :

$$x^p y^q z^r \ldots v^t \left(\frac{p}{x} dx + \frac{t}{v} dv\right) = 0.$$

On peut supprimer le premier facteur, car les racines $x = 0, y = 0, z = 0, \ldots, v = 0$, sont étrangères, puisqu'elles réduiraient le nombre effectif des parties qui doit être égal

à h. On a donc seulement

$$\frac{p}{x}dx + \frac{t}{v}dv = 0,$$

ou, d'après la seconde relation,

$$\left(\frac{p}{x} - \frac{t}{v}\right)dx = 0,$$

$$\frac{x}{p} = \frac{v}{t}.$$

Telle est la première équation de condition. Comme toutes les autres variables entrent d'une manière analogue, il est clair que leur considération successive conduira au système de conditions

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \dots = \frac{v}{t} = \frac{x+y+z\dots+v}{p+q+r\dots+t} = \frac{m}{s},$$

en désignant pour abréger par s la somme connue des exposants

$$s = p + q + r + \dots + t.$$

On tire de là les valeurs des variables

$$x = \frac{mp}{s}, \quad y = \frac{mq}{s}, \quad z = \frac{mr}{s}, \quad \dots \quad v = \frac{mt}{s};$$

et celle de la fonction

$$U = p^p q^q r^r \dots t^t \left(\frac{m}{s}\right)^s.$$

Elle sera évidemment un maximum, car u peut approcher de zéro pour de petites valeurs d'une variable et ne peut augmenter indéfiniment, puisque les variables ne peuvent dépasser m. On voit que ce maximum est atteint

lorsqu'on partage le nombre proposé m en parties respectivement proportionnelles aux exposants qui leur sont affectés.

Si on veut, en particulier, rendre le simple produit $xyz\ldots v$ maximum, on fera

$$p=q=r=\ldots=t=1, \quad s=k,$$

$$x=y=z=\ldots=v=\frac{m}{k},$$

$$U=\left(\frac{m}{k}\right)^k,$$

le maximum s'obtient alors quand toutes les variables sont égales.

CHAPITRE III.

THÉORIE DE L'INDÉTERMINATION.

101. *Symbole* $\frac{0}{0}$. — Il arrive parfois que pour certaines valeurs de la variable les deux termes d'une fraction s'annulent à la fois, sans qu'elle soit au fond indéterminée. Je citerai comme exemple le cas d'une fraction algébrique dans laquelle on aurait négligé de supprimer un facteur commun aux deux termes, et où l'on substituerait pour la variable une des racines de ce facteur. Le calcul différentiel fournit une méthode fort simple pour écarter cette difficulté.

Soit la fraction

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

et supposons que pour $x=a$, on ait à la fois

$$\varphi(a)=0, \quad \psi(a)=0.$$

On peut écrire, en remplaçant dans la formule de Taylor (22, p. 97) x par $x-a$,

$$f(x)=\frac{\varphi(a+\overline{x-a})}{\psi(a+\overline{x-a})}$$

$$=\frac{\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{1}(x-a)+\frac{\varphi''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots}{\psi(a)+\frac{\psi'(a)}{1}(x-a)+\frac{\psi''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots}.$$

Les conditions de la question font disparaître le premier terme du numérateur et du dénominateur. Le facteur $x - a$ devient par là commun et peut être supprimé, ce qui donne

$$f(x) = \frac{\varphi'(a) + \frac{\varphi''(a)}{1.2}(x-a) + \ldots}{\psi'(a) + \frac{\psi''(a)}{1.2}(x-a) + \ldots}.$$

Si maintenant on fait $x = a$, il vient

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

D'où la règle suivante : Pour avoir la vraie valeur d'une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il suffit de substituer au rapport des termes le rapport de leurs dérivées.

Comme cette égalité n'a lieu, bien entendu, que pour la valeur particulière de la variable qui introduit l'indétermination apparente, nous mettrons cette valeur en évidence au moyen d'un indice, et nous écrirons :

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_a = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_a.$$

102. Exemple I.

$$\left[\frac{x^m - 1}{x^n - 1}\right]_1 = \frac{0}{0} = \left[\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}\right]_1 = \frac{m}{n},$$

Exemple II.

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]_0 = \frac{0}{0} = \left[\frac{\cos x}{1}\right]_0 = 1. \quad (24)$$

Exemple III.

$$\left[\frac{\log x}{x-1}\right]_1 = \frac{0}{0} = \left[\frac{\frac{\log e}{x}}{1}\right]_1 = \log e.$$

Exemple IV.

$$\left[\frac{L(x+e)-1}{x}\right]_0 = \frac{0}{0} = \left[\frac{\frac{1}{x+e}}{1}\right]_0 = \frac{1}{e}.$$

Exemple V. — Si le résultat se présente plusieurs fois de suite sous la même forme, on répète autant de fois l'application de la règle. On aura, par exemple,

$$\left[\frac{2x^4-10x^3+18x^2-14x+4}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3}\right]_1 = \frac{0}{0}$$

$$= \left[\frac{8x^3-30x^2+36x-14}{4x^3-18x^2+24x-10}\right]_1 = \frac{0}{0}$$

$$= \left[\frac{24x^2-60x+36}{12x^2-36x+24}\right]_1 = \frac{0}{0}$$

$$= \left[\frac{48x-60}{24x-36}\right]_1 = \frac{-12}{-12} = 1.$$

103. *Symbole* $\frac{\infty}{\infty}$. — Supposons maintenant qu'on ait à la fois

$$\varphi(a) = \infty, \quad \psi(a) = \infty.$$

On pourra écrire en employant la règle précédente :

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_a = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_a = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \left[\frac{-\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}\right]_a$$

$$= \left[\frac{\psi'(x)\,\varphi^2(x)}{\varphi'(x)\,\psi^2(x)}\right]_a = \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_a \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_a^2,$$

on tire de là

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_a = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_a.$$

Par suite la règle à suivre est la même pour les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ que pour la forme $\frac{0}{0}$.

Exemple I.

$$(25)\qquad \left[\frac{Lx}{x}\right]_\infty = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\frac{1}{x}}{1}\right]_\infty = 0.$$

Exemple II.

$$\left[\frac{\operatorname{tang} x}{\log\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\log e}{x-\frac{\pi}{2}}}\right]_{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\log e \cos^2 x}\right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{0}{0} = \left[\frac{1}{-2\log e \cos x \sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}} = \infty.$$

104. *Symbole* $0 \times \infty$. — Supposons une expression

$$f(x) = \varphi(x).\psi(x),$$

avec les conditions

$$\varphi(a) = 0, \quad \psi(a) = \infty.$$

On peut écrire

$$f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_a = \frac{0}{0},$$

ou encore

$$f(a) = \left[\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_a = \frac{\infty}{\infty}.$$

On se trouve ainsi ramené à la règle précédente par deux transformations dont on choisira la plus simple.

Exemple.

$$(26)\quad [xLx]_0 = 0.\infty = \left[\frac{Lx}{\frac{1}{x}}\right]_0 = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_0 = [-x]_0 = 0.$$

105. *Symbole* $\infty - \infty$. — Si on a

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

avec les conditions

$$\varphi(a) = \infty,\quad \psi(a) = \infty;$$

on écrira

$$f(a) = \left[\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_a = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}}\right]_a = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0},$$

et on sera ramené au premier cas.

Exemple.

$$\left[\cot x - \frac{1}{x}\right]_0 = \infty - \infty = \left[\frac{1}{\tang x} - \frac{1}{x}\right]_0 = \left[\frac{x - \tang x}{x \tang x}\right]_0 = \frac{0}{0}$$

$$= \left[\frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\tang x + \frac{x}{\cos^2 x}}\right]_0 = \left[\frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x}\right]_0$$

$$= \frac{0}{0} = \left[\frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}\right]_0 = 0.$$

106. *Symboles* 0^0, ∞^0, 1^∞. — Prenons enfin une expres-

sion de la forme

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

et supposons que les quantités

$$\varphi(a), \quad \psi(a),$$

prennent l'une des valeurs

$$0, \quad \infty, \quad 1,$$

ce qui peut donner lieu aux trois combinaisons 0^0, ∞^0, 1^∞, dont on ne saurait apprécier immédiatement la valeur.

On prendra comme inconnue auxiliaire

$$F(x) = Lf(x) = \psi(x) . L\varphi(x),$$

expression qui rentrera dans les types précédents et dont on sera en état de trouver la valeur $F(a)$. On aura ensuite

$$f(a) = e^{F(a)}.$$

Exemple I.

$$[x^x]_0 = 0^0,$$
$$F(x) = L(x^x) = xLx,$$
$$F(0) = [xLx]_0 = 0, \qquad \text{Equation (26)},$$
$$[x^x]_0 = e^{F(0)} = 1.$$

Exemple II.

$$\left[\sqrt[x]{x}\right]_\infty = \left[x^{\frac{1}{x}}\right]_\infty = \infty^0,$$
$$F(x) = L\sqrt[x]{x} = \frac{Lx}{x},$$
$$F(\infty) = \left[\frac{Lx}{x}\right]_\infty = 0, \qquad \text{Equation (25)},$$
$$\left[\sqrt[x]{x}\right]_\infty = e^{F(\infty)} = 1.$$

EXEMPLE III.

$$\left[\sqrt[x^2]{\cos x}\right]_0 = \left[\cos^{\frac{1}{x^2}} x\right]_0 = 1^{\infty},$$

$$F(x) = L\sqrt[x^2]{\cos x} = \frac{L\cos x}{x^2},$$

$$F(0) = \left[\frac{L\cos x}{x^2}\right]_0 = \frac{0}{0} = \left[\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}\right]_0$$

$$= \left[-\frac{1}{2\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\right]_0 = -\frac{1}{2}, \quad \text{Équation (24)},$$

$$\left[\sqrt[x^2]{\cos x}\right]_0 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE DE LA DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

§ I.

RACINES SIMPLES.

107. La question que nous nous proposerons ici est la suivante : Considérant une fonction

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

dont les deux termes sont des polynômes entiers et rationnels en x, la décomposer en une somme de fractions dont les numérateurs soient des constantes et les dénominateurs des expressions du premier degré.

On peut d'abord, sans restreindre la généralité de la question, effectuer quelques simplifications.

Nous pouvons supposer le numérateur de degré inférieur à celui du dénominateur, car, s'il en était autrement, on effectuerait la division algébrique jusqu'à ce qu'on obtînt un reste de degré inférieur. On aurait alors partagé la fonction en deux autres, à savoir, un polynôme entier et rationnel que l'on conserverait à part et une fraction pour laquelle la condition se trouverait remplie.

On peut aussi admettre que le numérateur et le dénominateur n'ont aucune racine commune, car il s'ensuivrait pour ces deux termes des facteurs communs qu'il suffirait de supprimer.

On peut encore faire en sorte que le terme du degré le plus élevé au dénominateur ait pour coefficient l'unité positive. Car on peut diviser les deux termes de la fraction par ce coefficient et changer au besoin tous les signes.

Nous supposerons enfin, comme premier cas, que le dénominateur n'a pas de racines égales. Il peut alors se mettre sous la forme d'un produit de facteurs simples

$$\psi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-m).$$

108. Commençons par établir la possibilité du développement. Il est d'abord indispensable de prendre pour dénominateurs les facteurs de ψ. Car si on réduit toutes les fractions au même dénominateur, ce dernier sera le produit de tous les autres. Il devra du reste être identique à ψ, et comme un polynôme ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs premiers, il faut absolument que ces facteurs soient les dénominateurs partiels.

Si nous désignons par $\Psi(x)$ l'expression qu'on obtient en privant $\psi(x)$ du facteur $x-a$,

$$\Psi(x) = \frac{\psi(x)}{x-a}, \tag{27}$$

on aura identiquement, et quelle que soit la constante A,

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi(x) - A\Psi(x)}{\psi(x)},$$

car les deux membres reproduisent la quantité proposée. On décompose ainsi f en une première fraction $\frac{A}{x-a}$ qui remplit les conditions voulues et une autre expression encore rationnelle. Si donc on pouvait faire en sorte que le dénominateur de cette dernière ne contînt plus le facteur $x-a$, la question aurait évidemment fait un pas.

Or il suffit pour cela que le numérateur renferme lui-même ce facteur $x - a$, qu'on pourra alors supprimer; c'est-à-dire qu'il s'annule pour l'hypothèse $x = a$, ou qu'on ait

$$\varphi(a) - A\Psi(a) = 0,$$

ce qui exige simplement qu'on prenne pour l'indéterminée A la valeur suivante

(28) $$A = \frac{\varphi(a)}{\Psi(a)},$$

laquelle sera toujours admissible comme n'étant ni infinie, ni nulle, ni indéterminée. En effet, aucun de ses termes ne peut s'annuler, puisque φ n'a pas de racines communes avec ψ qui s'annule pour la valeur a, et que d'autre part Ψ a été obtenu en privant ψ de cette racine a, qu'il ne renfermait qu'une fois.

Si on traite alors de même la seconde fraction, on la décomposera à son tour en une première partie $\frac{B}{x - b}$ et une autre qui ne contiendra plus $x - b$ à son dénominateur; et ainsi de suite. De cette manière on obtiendra en définitive une expression de la forme

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{M}{x-m}.$$

109. Je dis maintenant que le développement ne peut avoir lieu que d'une seule manière. Nous savons déjà que les dénominateurs seront forcément les mêmes. Supposons donc qu'on ait trouvé par deux méthodes différentes

$$\frac{A}{x-a} + X = \frac{A'}{x-a} + X'.$$

On tirerait de là

$$A = A' + (x-a)(X' - X).$$

Cette égalité devant, comme la précédente, avoir lieu pour

toutes les valeurs de x, on peut y faire $x = a$, et alors elle donne

$$A = A'.$$

Nous établissons par là l'identité des deux termes relatifs à la racine a, et par suite de tous les autres, puisque cette racine est quelconque.

110. Il importe donc peu que la valeur (28) de A ait été obtenue en faisant à la racine a cette condition particulière d'être envisagée la première, puisque toute autre méthode reproduirait nécessairement le même résultat. On peut par suite former par une simple substitution de lettres les coefficients des termes en $b, c, \ldots m$.

Mais il est nécessaire pour cela de faire disparaître la fonction Ψ qui est le résultat d'une division particulière à la racine a. Or on a (101), en recourant à la valeur (27) de Ψ,

$$\Psi(a) = \left[\frac{\psi(x)}{x-a}\right]_a = \frac{0}{0} = \left[\frac{\psi'(x)}{1}\right]_a = \psi'(a),$$

et par suite

$$A = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

La formule complète sera donc

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}}{x-a} + \frac{\frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}}{x-b} + \frac{\frac{\varphi(c)}{\psi'(c)}}{x-c} + \ldots + \frac{\frac{\varphi(m)}{\psi'(m)}}{x-m}.$$

On peut dans chaque cas particulier obtenir une vérification, en réduisant au même dénominateur et effectuant tous les calculs, ce qui devra reproduire exactement l'expression proposée.

111. Exemple I. — Prenons comme application la fonction

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

nous formons l'expression conjuguée

$$\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{2x+p},$$

et nous y substituons à x les deux racines de $\psi(x)$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ce qui donne

$$\frac{\varphi\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)}{\psi'\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{p^2 - 4q}},$$

et par suite

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \times$$

$$\left[\frac{1}{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} - \frac{1}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}\right].$$

112. Exemple II. — Soit encore

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^n - 1}.$$

Nous formons l'expression conjuguée

$$\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}},$$

et nous y substituons à x les racines de $\psi(x)$ (18, p. 93), ou d'après la formule d'Euler (13, p. 86),

$$x_k = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}};$$

d'où (14, p. 86),

$$x_k^{n-1} = e^{\frac{2(n-1)k\pi\sqrt{-1}}{n}} = e^{2k\pi\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} = e^{-\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}$$

$$\frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} = \frac{1}{n} e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}}{x - e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}} + \dfrac{e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{n}}}{x - e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{n}}} + \ldots \\ + \dfrac{e^{\frac{2(n-1)\pi\sqrt{-1}}{n}}}{x - e^{\frac{2(n-1)\pi\sqrt{-1}}{n}}} \end{array}\right\}.$$

§ II.

RACINES MULTIPLES.

113. Supposons maintenant que le dénominateur ait des racines égales. Nous le mettrons sous la forme

$$\psi(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-m)^\mu,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \mu$, désignant des nombres entiers et positifs dont quelques-uns peuvent être l'unité.

Démontrons en premier lieu la possibilité du développement. Il est clair d'abord que les dénominateurs seront nécessairement les facteurs de ψ, mais qu'ils pourront figurer à toutes les puissances qui ne dépassent pas $\alpha, \beta, \ldots, \mu$. Désignons par Ψ le résultat qu'on obtient en privant complétement ψ de sa racine a,

$$\Psi(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^\alpha}.$$

On aura encore identiquement, quel que soit A,

$$f(x)=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{\varphi(x)-A\Psi(x)}{\psi(x)};$$

et on peut faire en sorte que la seconde fraction renferme à son dénominateur le facteur $x-a$ une fois de moins que la proposée. Il suffit pour cela que le numérateur s'annule pour cette valeur ou que

$$A=\frac{\varphi(a)}{\Psi(a)},$$

valeur qui est encore dans ce cas finie et déterminée.

Si maintenant on opère de même sur la nouvelle fonction, on en extraira un premier terme $\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ qui aura pour dénominateur la plus forte puissance de $x-a$ laquelle est maintenant $\alpha-1$, et une autre partie qui ne renfermera plus ce facteur qu'avec l'exposant $\alpha-2$; et ainsi de suite, jusqu'à un terme en $x-a$ au premier degré. Le dénominateur du nouveau reste sera alors complétement débarrassé de la racine a. On l'envisagera par rapport à b et on continuera toujours de même. Il est clair qu'on obtiendra ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{M}{(x-m)^\mu}+\frac{M_1}{(x-m)^{\mu-1}}+\frac{M_2}{(x-m)^{\mu-2}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}}{x-m}.\end{aligned}$$

114. Montrons, en second lieu, que le développement n'est possible que d'une seule manière. Nous avons reconnu déjà que les dénominateurs sont forcément les facteurs

de ψ. Soient α et α' les plus fortes puissances de $x-a$ dans les deux développements, et supposons que α' soit au plus égal à α. On aura

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+X=\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+X';$$

d'où

$$A=A'(x-a)^{\alpha-\alpha'}+(X'-X)(x-a)^{\alpha}.$$

Si on fait $x=a$, la second terme disparaît, puisque α n'est pas nul. Comme A ne l'est pas non plus, il faut que le premier subsiste, et pour cela qu'il soit indépendant du facteur $x-a$, ce qui exige qu'on ait

$$\alpha=\alpha'.$$

L'égalité donne alors

$$A=A'.$$

Ainsi les termes de plus fort exposant sont identiques. Supprimant ces termes de part et d'autre, et passant aux suivants, nous établirons, dans toutes leurs parties, l'identité des deux formules.

115. Puisque le développement n'est susceptible que d'une seule forme, il suffit d'obtenir par la méthode la plus simple la partie relative à une quelconque des racines.

Dans ce but, je ferai pour abréger

$$\mathcal{A}(x)=(x-a)^{\alpha}f(x),$$
$$\mathcal{B}(x)=(x-b)^{\beta}f(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathcal{M}(x)=(x-m)^{\mu}f(x).$$

Si je développe par la formule de Taylor, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x)&=\mathcal{A}(a+\overline{x-a})\\&=\mathcal{A}(a)+\frac{\mathcal{A}'(a)}{1}(x-a)+\frac{\mathcal{A}''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots\\&\quad+\frac{\mathcal{A}^{(\alpha-1)}(a)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}(x-a)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha}R.\end{aligned}$$

en désignant par R le reste de la série, sauf le facteur $(x-a)^\alpha$ qui s'y trouve partout en évidence. On tire de là

$$f(x)=\frac{\mathcal{A}(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{\mathcal{A}(a)}{(x-a)^\alpha}+\frac{\frac{1}{1}\mathcal{A}'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\mathcal{A}''(a)}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}\mathcal{A}^{(\alpha-1)}(a)}{x-a}+\mathrm{R}.$$

Nous obtenons ainsi la partie du développement relative à la racine quelconque a, et par analogie nous formerons son expression complète

$$f(x)=\frac{\mathcal{A}(a)}{(x-a)^\alpha}+\frac{\frac{1}{1}\mathcal{A}'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\mathcal{A}''(a)}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}\mathcal{A}^{(\alpha-1)}(a)}{x-a}$$

$$+\frac{\mathcal{B}(b)}{(x-b)^\beta}+\frac{\frac{1}{1}\mathcal{B}'(b)}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\mathcal{B}''(b)}{(x-b)^{\beta-2}}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots(\beta-1)}\mathcal{B}^{(\beta-1)}(b)}{x-b}$$

....

$$+\frac{\mathcal{M}(m)}{(x-m)^\mu}+\frac{\frac{1}{1}\mathcal{M}'(m)}{(x-m)^{\mu-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\mathcal{M}''(m)}{(x-m)^{\mu-2}}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots(\mu-1)}\mathcal{M}^{(\mu-1)}(m)}{x-m}.$$

116. Exemple. — Considérons comme application l'expression

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^n} = \frac{1}{(x-1)^n (x+1)^n}.$$

Nous ferons

$$\mathcal{A}(x) = (x-1)^n f(x) = (x+1)^{-n}.$$

Différentiant k fois de suite (44, V),

$$\mathcal{A}^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{(x+1)^{n+k}}.$$

Faisons $x = 1$,

$$\mathcal{A}^{(k)}(1) = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{2^{n+k}};$$

d'où

$$\frac{\mathcal{A}^{(k)}(1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{(-1)^k}{2^n} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{2.4.6.8\ldots 2k}.$$

On aura de même

$$\mathcal{B}(x) = (x+1)^n f(x) = (x-1)^{-n},$$

$$\mathcal{B}^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{(x-1)^{n+k}}.$$

En faisant $x = -1$, on obtient au dénominateur 2^{n+k} avec la puissance $n+k$ du facteur -1, ce qui remplace au numérateur la puissance k par la puissance n de ce facteur, ou simplement par le double signe $\pm$ indépendant de k, et dont on doit prendre les signes supérieur ou inférieur suivant que n est pair ou impair :

$$\mathcal{B}^{(k)}(-1) = \pm \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{2^{n+k}},$$

$$\frac{\mathcal{B}^{(k)}(-1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{\pm 1}{2^n} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{2.4.6.8\ldots 2k}.$$

On voit que les coefficients seront les mêmes en valeur absolue pour les puissances semblables des facteurs relatifs aux deux racines. En ayant égard aux signes, il vient

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \pm \frac{1}{2^n} \times \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{(x+1)^n} \pm \frac{1}{(x-1)^n}\right] \\ + \frac{n}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n-1}} \mp \frac{1}{(x-1)^{n-1}}\right] \\ + \frac{n(n+1)}{2.4}\left[\frac{1}{(x+1)^{n-2}} \pm \frac{1}{(x-1)^{n-2}}\right] \\ + \frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}\left[\frac{1}{(x+1)^{n-3}} \mp \frac{1}{(x-1)^{n-3}}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right] \end{array} \right\}.$$

Comme exemple, faisons en particulier $n=2$, il viendra

$$\frac{1}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right].$$



LIVRE III.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

TANGENTES.

§ I.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

117. *Équation de la tangente.* — Si on prend un point sur une ligne plane, et qu'on y mène une droite de manière à rencontrer encore la courbe dans le voisinage, on verra, quand on fera tourner la droite dans le sens convenable, la seconde intersection se rapprocher du point considéré; si on continue ainsi, elle passera de l'autre côté et ira alors en s'éloignant. Il y a donc une position précise qui correspond au passage d'un côté à l'autre et où la seconde intersection disparaît momentanément. Cette droite est appelée la *tangente* à la courbe au point considéré.

Nous substituerons immédiatement à cette définition exacte un aperçu imparfait, en traitant la tangente comme une droite qui passe par le point proposé $M(x, y)$ et par un autre $M'(x+dx, y+dy)$ pris sur la courbe infiniment près du premier. Ces deux lignes différeront en effet infiniment peu, et pourront par suite être substituées l'une à l'autre.

Si X et Y désignent les coordonnées courantes, c'est-à-

Fig. 3.



dire celles d'un point N quelconque de cette droite, on aura dans les triangles semblables MM'H, MNK la proportion

$$\frac{MH}{MK} = \frac{M'H}{NK},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{X-x} = \frac{dy}{Y-y}.$$

Telle est l'équation de la tangente à une courbe quelconque. On la met ordinairement sous la forme

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

il suffit dans chaque cas d'y substituer la valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation de la courbe.

118. Exemple. — Considérons les *paraboles* représentées par l'équation

(29) $$y = ax^n,$$

dans laquelle n est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

Il vient en différentiant

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} = n\frac{y}{x},$$

et en substituant dans l'équation de la tangente

$$Y - y = n\frac{y}{x}(X - x) = n\frac{y}{x}X - ny,$$

$$Y = n\frac{y}{x}X + (1 - n)y.$$

Pour construire facilement cette droite, nous chercherons son ordonnée à l'origine en faisant

$$X = 0, \quad Y_0 = (1 - n)y.$$

On voit qu'elle est égale dans la parabole d'ordre n au multiple $1 - n$ de l'ordonnée du point de contact.

On a, en particulier, pour la parabole du second ordre,

$$y^2 = 2px, \quad y = \sqrt{2p}.x^{\frac{1}{2}}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad 1 - n = \frac{1}{2}, \quad Y_0 = \frac{y}{2};$$

pour la *seconde parabole cubique*,

$$y^2 = mx^3, \quad y = \sqrt{m}.x^{\frac{3}{2}}, \quad n = \frac{3}{2}, \quad 1 - n = -\frac{1}{2}, \quad Y_0 = -\frac{y}{2};$$

pour l'hyperbole,

$$xy = m^2, \quad y = m^2.x^{-1}, \quad n = -1, \quad 1 - n = 2, \quad Y_0 = 2y.$$

119. *Normale.* — On appelle *normale* à une courbe, en un point dit d'*incidence*, la droite qu'on y mène à angle droit sur la tangente. Si nous nous bornons aux coordonnées orthogonales, son coefficient angulaire devra être réciproque et de signe contraire à celui $\frac{dy}{dx}$ de la tangente; comme elle doit du reste passer par le point considéré (x, y), elle aura pour équation

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

ou sous une forme symétrique

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0.$$

120. On peut déduire de là une propriété générale de la normale. Cherchons en effet la plus courte et la plus grande distance de deux courbes C, C'. Si x, y et x', y' désignent les extrémités de cette distance Δ, on aura

$$\Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2.$$

Cette expression renferme quatre variables; mais deux seulement, x et x', sont indépendantes, car y et y' en sont respectivement fonctions d'après les équations des deux courbes que nous n'avons pas spécifiées.

Pour trouver les changements de sens de Δ (92), nous devons annuler ses deux dérivées partielles relatives aux variables indépendantes. Si nous y envisageons d'abord x, comme y seul en est fonction, on aura

$$2\Delta\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)=2(x-x')+2(y-y')\frac{dy}{dx}.$$

Nous poserons donc

$$(x-x')+(y-y')\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{dx}{dy}.$$

Mais $\frac{y-y'}{x-x'}$ est le coefficient angulaire de la droite qui joint les points (x,y) (x',y'); $-\frac{dx}{dy}$ est celui de la normale au point (x,y); donc la droite en question est normale à la courbe C. En considérant de même l'autre dérivée partielle, on reconnaîtrait qu'elle est aussi normale à la courbe C'. On voit par là que la plus courte et la plus longue distance de deux lignes se mesurent suivant leurs normales communes.

Si on réduit en particulier une des lignes à un point, on reconnaît que la plus courte et la plus longue distance d'un point à une courbe s'estiment suivant les normales qu'on peut lui mener par ce point.

121. *Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale.* — On appelle proprement *tangente* et *normale* les portions de ces droites qui se trouvent comprises entre la courbe et l'axe des abscisses. La *sous-tangente* et la *sous-normale* sont leurs projections sur cet axe. Nous les considérerons comme des longueurs absolues en faisant abstraction des signes.

Si on se borne encore aux coordonnées rectangulaires, on

Fig. 4.



aura pour l'inclinaison φ de la tangente sur l'abscisse et par suite de la normale sur l'ordonnée

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Les triangles rectangles MPT, MPN, donneront donc

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} T &= \frac{y}{\sin\varphi} = y\sqrt{1+\cot^2\varphi} = y\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2},\\ N &= \frac{y}{\cos\varphi} = y\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = y\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2},\\ S_t &= y\cot\varphi = y\frac{dx}{dy},\\ S_n &= y\operatorname{tang}\varphi = y\frac{dy}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Exemples. — On s'assurera facilement que ces quatre longueurs sont respectivement constantes dans les courbes suivantes :

Tractrice,

$$x = m + \sqrt{n^2 - y^2} + nL\frac{y}{n + \sqrt{n^2 - y^2}}, \qquad T = n.$$

Cercle,

$$(x + m)^2 + y^2 = n^2, \qquad N = n.$$

Logarithmique,

$$y = me^{\frac{x}{n}}, \qquad S_t = n.$$

Parabole,

$$y^2 = m + 2nx, \qquad S_n = n.$$

§ II.

FORME DES COURBES.

122. *Points limites.* — Reprenons des coordonnées rectilignes quelconques et cherchons les points dans lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x. Il faudra pour cela que son équation se réduise à $Y = y$, ou qu'on ait

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

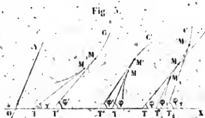
En combinant cette équation avec celle de la courbe, on aura deux relations pour trouver les coordonnées inconnues.

On verrait absolument de même que pour avoir les points où la tangente est parallèle à l'axe des y, il faut joindre à l'équation de la courbe

$$\frac{dx}{dy} = 0.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que ces points n'ont pas une existence absolue sur une courbe donnée, mais qu'ils sont relatifs au système d'axes que l'on emploie. Nous allons, au contraire, en envisager d'autres qu'on appelle *points singuliers* et qui présentent des accidents de forme indépendants du choix des axes.

123. *Points d'inflexion.* — Pour acquérir une idée plus complète de la forme d'une ligne en un point, il nous faudra étudier le sens et la grandeur de sa courbure. Or il est très-facile de résoudre la première partie de la question, c'est-à-dire de savoir de quel côté de la tangente se trouve la courbe. On l'exprime en disant qu'elle est *convexe* ou *concave* par rapport à l'axe des abscisses.



Pour une courbe convexe C_1, en s'avançant de M en M' dans le sens croissant des abscisses, on rencontre des inclinaisons croissantes φ et φ'; car φ' est l'angle extérieur et φ l'angle intérieur d'un triangle. Le coefficient angulaire varie dans le même sens, car il passe de zéro à l'infini, en même temps que l'inclinaison augmente depuis zéro jusqu'à l'angle des axes. Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est une fonction croissante de x, et par suite sa dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive (12).

Si, au contraire, la courbe C' est concave, l'inclinaison va

en diminuant, car φ est alors l'angle extérieur et φ' l'angle intérieur du triangle; $\frac{dy}{dx}$ est donc décroissant et $\frac{d^2y}{dx^2}$ négative.

Si enfin la courbe C″ présente en M un *point d'inflexion*, où la courbure change de sens et où la tangente traverse la courbe, la ligne qui était en deçà convexe ou concave devient au delà concave ou convexe; en d'autres termes $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe et passe par zéro.

Ainsi, en résumé, la valeur de la première dérivée donne la direction de la courbe, et le signe de la seconde indique le sens de la courbure de la manière suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \quad \text{convexité};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \quad \text{concavité};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{inflexion}.$$

Si on veut trouver directement les points d'inflexion d'une courbe proposée, il suffira donc de joindre à son équation la suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et d'éliminer entre elles x et y. Ce système aura, en général, des solutions, et par suite l'existence des points d'inflexion est normale dans les courbes.

124. *Points multiples.* — On rencontre parfois des points où une ligne se coupe elle-même de manière à présenter plusieurs branches et plusieurs tangentes. On les appelle des *points multiples*.

Le coefficient de la tangente $\frac{dy}{dx}$ y doit être susceptible de plusieurs valeurs. Mais quand on veut trouver d'après une équation

$$f(x,y)=0$$

la valeur de ce coefficient, la méthode (27) consiste à la différentier sous la forme

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy=0.$$

On obtient ainsi une équation du premier degré, incapable, tant qu'elle subsistera, de fournir plusieurs valeurs pour l'inconnue $\frac{dy}{dx}$. Cette équation doit donc s'évanouir dans les points en question, ce qui exige qu'on ait à la fois

$$(31)\qquad \left(\frac{df}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{df}{dy}\right)=0.$$

En résolvant ce système, on trouvera les coordonnées des points cherchés. Mais il faudra bien entendu qu'elles satisfassent à l'équation de la courbe, ce qui donne une relation de condition. Ainsi l'existence des points multiples ne sera pas normale comme celle des points d'inflexion ; elle constituera au contraire une exception.

125. Ces points une fois trouvés, si on y veut connaître les directions de la courbe, on ne peut plus recourir à la relation différentielle qui a disparu. Mais si nous formons l'équation différentielle seconde, elle nous donne pour un point quelconque

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)dxdy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{df}{dy}\right)d^2y=0.$$

Aux points en question le dernier terme disparaît d'après la

condition (31) et on peut écrire

$$\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 0,$$

équation du second degré qui fournira deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ et par suite deux tangentes pour la courbe en ce point.

Si ces deux valeurs sont réelles et inégales, y sera en général réel et doué de deux valeurs en deçà et au delà de ce point. On aura alors deux branches continues ou un *nœud*. Il peut aussi arriver que les deux valeurs de y ne soient réelles que d'un côté, ou que l'expression de l'ordonnée n'ait qu'une seule valeur. On obtient dans ce cas un *point saillant* ou *anguleux*.

Si les racines sont égales, les deux branches se touchent. Il se peut encore que y soit réel de part et d'autre, ce qui constitue un *point de contact*, ou qu'il ne soit réel que d'un côté, ce qui donne un *rebroussement*. On le dit de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que les deux parties de la courbe laissent la tangente entre elles ou d'un même côté. On en sera averti par le sens de la courbure, c'est-à-dire par le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui sera différent ou le même pour les deux branches ([1]). L'existence de ces points exige encore la condition suivante pour l'égalité des racines

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2.$$

Ils seront, par suite, encore plus rares que les précédents.

126. Si on avait, outre l'équation de la courbe et ses

([1]) Ce caractère serait en défaut pour un rebroussement de première espèce dont la tangente serait parallèle à l'axe des y; mais on peut trouver directement ces points en choisissant, parmi ceux dont la tangente est parallèle à l'axe des y, ceux aux environs desquels l'ordonnée n'a qu'une seule valeur qui doit être finie et réelle de part et d'autre.

deux dérivées du premier ordre, les trois suivantes

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) = 0,$$

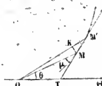
ce qui donne deux relations déterminantes et quatre conditions, l'équation différentielle seconde s'évanouirait encore, et il faudrait recourir à celle du troisième ordre. Elle renfermerait $\frac{dy}{dx}$ au cube, et indiquerait, par suite, trois tangentes ou un *point triple*. On pourra ainsi obtenir des points de plus en plus multiples; mais leur existence deviendra de plus en plus exceptionnelle, car le nombre des conditions nécessaires s'accroîtra rapidement ([1]).

§ III.

COORDONNÉES POLAIRES.

127. Quand on emploie le système de coordonnées po-

Fig. 6.



laires, on détermine la tangente par l'angle μ qu'elle fait avec le rayon vecteur du point de contact, en choisissant

([1]) On rattache encore aux points singuliers les *points d'arrêt* où une branche de courbe se termine brusquement. On les obtient en cherchant pour quelles valeurs de x une valeur unique de y devient imaginaire.

Les *points isolés* se trouvent de même en cherchant les valeurs de x qui rendent y exceptionnellement réel, tandis que les abscisses voisines moindres ou supérieures donneraient des valeurs imaginaires.

parmi les deux angles adjacents celui dont l'ouverture est tournée vers l'axe polaire.

Pour l'évaluer, considérons la tangente comme passant par le point M et un point infiniment voisin M'. Tirons les rayons vecteurs $OM = r$ et $OM' = r + dr$. Puis de O comme centre, avec r comme rayon, traçons un élément de cercle MK que nous pouvons confondre avec la perpendiculaire abaissée de M sur OM', puisque le cercle est normal à ses rayons. Nous aurons dans le triangle rectangle MKM' :

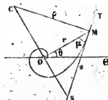
$$\operatorname{tang} MM'K = \frac{MK}{M'K}.$$

Mais MM'K ne diffère de l'angle extérieur μ que de l'angle en O qui est égal à $d\theta$ et peut être négligé. MK étant un arc de cercle, de rayon r et d'angle au centre $d\theta$, a pour valeur $r\,d\theta$. Enfin KM', qu'on obtient en rabattant OM sur OM', est l'accroissement dr du rayon vecteur. Il vient ainsi

$$\operatorname{tang} \mu = r \frac{d\theta}{dr}.$$

128. Exemple I. — Considérons comme application la

Fig. 7.



spirale logarithmique, qui est représentée par l'équation

$$r = m^\theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = m^\theta\, Lm,$$

$$\operatorname{tang} \mu = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{Lm}, \quad \mu = \operatorname{arc} \cot Lm,$$

valeur constante. La spirale logarithmique est donc la ligne qui traverse sous le même angle un faisceau de droites rayonnant autour du pôle.

Exemple II. — Prenons, en second lieu, l'équation des *spirales sinusoïdes*, dans laquelle n est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif,

$$r^n = m \sin n\theta,$$

$$nr^{n-1}\frac{dr}{d\theta} = mn \cos n\theta,$$

en divisant membre à membre

$$\tang \mu = r\frac{d\theta}{dr} = \tang n\theta;$$

d'où

$$\mu = n\theta.$$

Ainsi l'angle que fait une spirale sinusoïde d'ordre n avec son rayon vecteur est égal à n fois l'azimut.

On a, en particulier, pour le cercle,

$$r = 2R \sin\theta, \quad n = 1, \quad \mu = \theta;$$

pour la *lemniscate de Bernoulli*,

$$r^2 = 2m^2 \sin 2\theta, \quad n = 2, \quad \mu = 2\theta;$$

pour l'hyperbole équilatère,

$$r^2 \sin 2\theta = 2m^2, \quad n = -2, \quad \mu = \pi - 2\theta;$$

pour la parabole,

$$r \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{p}{2}, \quad n = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \pi - \frac{\theta}{2}.$$

129. *Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale.* — Dans le système polaire, la tangente et la normale se

comptent depuis la courbe jusqu'à la perpendiculaire élevée au pôle sur le rayon vecteur. La sous-tangente et la sous-normale sont les projections de ces longueurs sur cette même perpendiculaire.

On a dans les triangles rectangles OMC, OMS (*fig.* 7) :

$$T = \frac{r}{\cos\mu} = r\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\mu} = r\sqrt{1+\left[r\frac{d\theta}{dr}\right]^2},$$

$$N = \frac{r}{\sin\mu} = r\sqrt{1+\cot^2\mu} = \sqrt{r^2+\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2},$$

$$S_t = r\operatorname{tang}\mu = r^2\frac{d\theta}{dr},$$

$$S_n = r\cot\mu = \frac{dr}{d\theta}.$$

Exemples. — On s'assurera facilement que ces quatre longueurs sont respectivement constantes dans les courbes suivantes :

Spirale tractrice,

$$\theta = m + \arcsin\frac{r}{n} + \sqrt{\frac{n^2}{r^2}-1}, \qquad T = n.$$

Cercle,

$$r = n\sin(\theta + m), \qquad N = n.$$

Spirale hyperbolique,

$$r(\theta + m) = n, \qquad S_t = n.$$

Spirale d'Archimède,

$$r = m + n\theta, \qquad S_n = n.$$



CHAPITRE II.

ASYMPTOTES.

§ 1.

MÉTHODE GÉNÉRALE.

130. Certaines courbes présentent des branches indéfinies qui tendent de plus en plus vers la forme rectiligne, de telle sorte qu'il existe une certaine droite dont elles s'approchent autant qu'on le veut, sans cependant se confondre jamais avec elle. De pareilles droites sont appelées des *asymptotes*.

Il est facile de trouver d'abord celles qui seraient parallèles à l'un des axes, par exemple à celui des ordonnées. Car si on tire de l'équation l'expression de y, il suffira de chercher les valeurs finies de x qui la rendent infinie. Il sera toutefois nécessaire de s'assurer que la fonction est dans le voisinage réelle et indéfiniment croissante.

131. Les autres asymptotes auront des équations de la forme

$$y = hx + k,$$

où h et k sont des quantités inconnues qui peuvent être nulles, mais non infinies. On peut aussi écrire :

$$(32) \qquad \begin{cases} h = \dfrac{y}{x} - \dfrac{k}{x}, \\ k = y - hx. \end{cases}$$

Si on s'avance indéfiniment sur la droite, en faisant x et y infinis, il reste

$$(33)\quad \begin{cases} h = \left[\frac{y}{x}\right]_\infty, \\ k = [y - hx]_\infty. \end{cases}$$

Mais dans ces régions la courbe s'approche indéfiniment de la droite, de telle sorte que la différence de leurs ordonnées devient infiniment petite. On peut donc la négliger devant des quantités finies, et à plus forte raison devant des quantités infinies. C'est-à-dire qu'on peut alors confondre les équations des deux lignes ou considérer les valeurs précédentes comme tirées de celle de la courbe. De là la règle suivante :

On déduira de l'équation de la courbe le rapport $\frac{y}{x}$ et on y fera $x = \infty$. Il se présentera ordinairement sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$; mais on fera disparaître l'indétermination par la méthode connue (103), et la valeur ainsi trouvée fournira le coefficient angulaire h de l'asymptote. On formera alors l'expression $y-hx$, et on y fera encore $x = \infty$, ce qui donnera en général le symbole $\infty - \infty$; mais en évitant l'indétermination (105), on obtiendra l'ordonnée à l'origine k de l'asymptote. Si cette valeur est nulle, la droite passe à l'origine; si elle est infinie, elle indique l'absence d'asymptote et conduit à rejeter la valeur correspondante de h.

132. Exemple I. — On reconnaît facilement que la *logarithmique* et la *cissoïde* qui ont pour équations

$$y = \log(x - m), \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{m - x}},$$

ont chacune une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

pour l'abscisse m. La courbe

$$y\,(L^2 x - 1) = m$$

en a deux pour les abscisses e et $\frac{1}{e}$. Enfin la courbe

$$y = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}$$

en a une infinité pour toutes les abscisses qui sont des nombres entiers impairs, positifs ou négatifs.

Exemple II. — Soit l'équation

$$y = x + \frac{Lx}{x}.$$

On en tire

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{Lx}{x^2},$$

$$h = \left[\frac{y}{x}\right]_\infty = 1 + \left[\frac{Lx}{x^2}\right]_\infty = 1 + \left[\frac{1}{x}\right]_\infty \left[\frac{Lx}{x}\right]_\infty = 1,$$

d'après la valeur (25, p. 130). On a ensuite

$$k = [y - hx]_\infty = [y - x]_\infty = \left[\frac{Lx}{x}\right]_\infty = 0.$$

La courbe a donc pour asymptote la bissectrice de l'angle des coordonnées positives.

§ II.

COURBES ALGÉBRIQUES.

133. On évite facilement les difficultés qui naissent de l'indétermination, quand l'équation de la courbe est algébrique. La méthode peut être alors plus nettement formulée, tout en restant complétement générale.

Pour trouver d'abord les asymptotes parallèles à l'axe des y, ordonnons l'équation par rapport aux puissances de cette variable

$$Xy^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \ldots + X_{n-1} y + X_n = 0,$$

ou, en divisant par y^n,

$$X + \frac{X_1}{y} + \frac{X_2}{y^2} + \ldots + \frac{X_{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{X_n}{y^n} = 0.$$

Pour $y = \infty$, l'équation se réduit à

$$X = 0;$$

si donc celle-ci a des racines réelles pour x, l'équation de la courbe sera satisfaite en prenant chacune d'elles pour abscisse avec une ordonnée infinie. Elles fourniront par suite autant d'asymptotes. Ainsi les abscisses des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées sont les racines du coefficient de la plus forte puissance de y.

Si m est le degré de l'équation, $m - n$ est au plus le degré de X. Ce polynôme n'a donc pas plus de $m - n$ racines, ou la courbe plus de $m - n$ asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.

134. Cherchons maintenant les asymptotes inclinées. Les termes de degré m ont la forme $Px^{m-p}y^p$ ou $x^m . P\left(\frac{y}{x}\right)^p$. Leur ensemble est donc le produit de x^m par une fonction de $\frac{y}{x}$. De même la partie de degré $m - 1$ sera le produit de x^{m-1} par une autre fonction de $\frac{y}{x}$, et ainsi de suite. De sorte que l'équation peut être prise sous la forme

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Divisons tout par x^m,

$$f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f_2\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots=0,$$

et faisons $x=\infty$. Nous savons que $\frac{y}{x}$ prend alors la valeur finie h (131). Il reste par conséquent

(34) $$f(h)=0.$$

Le coefficient angulaire de l'asymptote est donc fourni par les racines de l'expression qu'on obtient en remplaçant dans la partie du degré le plus élevé x par l'unité et y par h.

Substituons à $\frac{y}{x}$ dans l'équation de la courbe la valeur $h+\frac{k}{x}$ (32, p. 159) qui convient à l'asymptote. Nous ne commettrons par là qu'une erreur qui deviendra infiniment petite et disparaîtra quand nous ferons $x=\infty$. Il vient ainsi

$$f\left(h+\frac{k}{x}\right)+\frac{1}{x}f_1\left(h+\frac{k}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f_2\left(h+\frac{k}{x}\right)+\ldots=0.$$

Développons chaque terme par la formule de Taylor en remplaçant dans cette dernière a par h et x par $\frac{k}{x}$, nous aurons

$$\begin{aligned}&\left[f(h)+\frac{f'(h)}{1}\frac{k}{x}+\frac{f''(h)}{1.2}\frac{k^2}{x^2}+\ldots\right]\\&+\frac{1}{x}\left[f_1(h)+\frac{f'_1(h)}{1}\frac{k}{x}+\frac{f''_1(h)}{1.2}\frac{k^2}{x^2}+\ldots\right]\\&+\frac{1}{x^2}\left[f_2(h)+\frac{f'_2(h)}{1}\frac{k}{x}+\frac{f''_2(h)}{1.2}\frac{k^2}{x^2}+\ldots\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & f(h) + \frac{1}{x}[kf'(h) + f_1(h)] \\ & \quad + \frac{1}{x^2}\left[\frac{k^2}{2}f''(h) + kf'_1(h) + f_2(h)\right] + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme est nul, puisque h est une des racines de l'équation (34). On peut par suite supprimer le facteur $\frac{1}{x}$ et écrire en abrégé

$$kf'(h) + f_1(h) + \frac{H}{x} = 0,$$

de sorte qu'en faisant $x = \infty$, il reste

$$kf'(h) + f_1(h) = 0,$$
$$k = -\frac{f_1(h)}{f'(h)}.$$

135. Si h est une racine simple de l'équation (34), $f'(h)$ n'est pas nul et on trouve pour k une valeur finie.

Si le résultat de la substitution de l'unité pour x et de h pour y dans la partie de degré $m-1$ la fait évanouir, en un mot si $f_1(h) = 0$, on a $k = 0$, et l'asymptote passe à l'origine. Cela arrive toujours quand l'équation n'a pas de termes du degré $m-1$.

Si h est une racine double, $f'(h)$ est nul, et si $f_1(h)$ ne l'est pas, on a $k = \infty$; ce qui indique l'absence d'asymptote et conduit à rejeter cette racine.

Si $f_1(h)$ est nul en même temps que $f'(h)$, k prend la forme indéterminée. Mais si nous remarquons que les deux premiers termes de l'équation (35) disparaissent alors à la fois, nous pouvons y supprimer le facteur $\frac{1}{x^2}$ et écrire en abrégé

$$\frac{k^2}{2}f''(h) + kf'_1(h) + f_2(h) + \frac{H'}{x} = 0;$$

en faisant x infini, il reste

$$f''(h).k^2 + 2f_1'(h).k + 2f_2(h) = 0,$$

équation du second degré qui donnera deux racines pour l'ordonnée à l'origine. Si elles sont réelles, on aura deux asymptotes parallèles dans la direction indiquée par la valeur de h; si elles sont égales, une seule; si elles sont imaginaires, il faudra rejeter cette valeur de h.

On pourrait encore discuter cette équation comme la précédente. Je me bornerai à considérer le cas où ses trois coefficients s'annuleraient à la fois pour une valeur de h, ce qui ne pourra arriver que pour une racine triple de l'équation (34). On devra encore recourir à la formule (35), y effacer les trois premiers termes, supprimer le facteur $\frac{1}{x^2}$, puis faire $x = \infty$, ce qui la réduira à sa quatrième partie qui est du troisième degré en k. On aura alors, en général, trois asymptotes parallèles à cette direction. Et ainsi de suite.

On voit par là que le nombre des asymptotes inclinées ne peut surpasser le degré de h dans $f(h)$ ou de y dans f, puisque plusieurs racines se confondent, lorsque autant d'asymptotes deviennent parallèles. Or le degré de y dans f est au plus égal au plus fort degré n de y dans toute l'équation. Il y a donc au plus n asymptotes inclinées. Mais nous avons déjà reconnu qu'il y en a au plus $m - n$ parallèles à l'axe des ordonnées. Donc une courbe algébrique ne peut avoir un nombre total d'asymptotes supérieur au degré m de son équation.

136. Exemple I. — Appliquons à l'équation générale du second degré

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

On ne peut avoir d'asymptotes parallèles à l'axe des y, si a

n'est pas nul. Nous prendrons donc

$$f(h) = ah^2 + bh + c,$$
$$f'(h) = 2ah + b,$$
$$f_1(h) = dh + e,$$

et nous poserons

$$f(h) = ah^2 + bh + c = 0,$$
$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Il faut d'abord que le radical soit réel, ce qui exclut l'ellipse. On obtient alors deux directions auxquelles correspondent les valeurs

$$k = -\frac{f_1(h)}{f'(h)} = \frac{1}{2a}\left(-d \pm \frac{bd - 2ae}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right).$$

Comme elles doivent être finies, il faut en outre que le dénominateur ne soit pas nul, ce qui exclut encore la parabole.

Exemple II. — Soit l'équation

$$xy^2 - 2x^2y + x^3 + xy - x^2 - 6x + m = 0.$$

Pour avoir les asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, nous poserons $x = 0$, ce qui indique cet axe lui-même.

On aura ensuite

$$f(h) = h^2 - 2h + 1,\quad f_1(h) = h - 1,\quad f_2(h) = -6,$$
$$f'(h) = 2h - 2,\qquad f'_1(h) = 1,$$
$$f''(h) = 2.$$

Si nous posons

$$f(h) = h^2 - 2h + 1 = 0,$$

nous obtiendrons deux racines égales à l'unité, ce qui indique la direction de la bissectrice de l'angle des coordonnées positives.

Comme on a du reste à la fois

$$f'(1) = 0, \quad f_1(1) = 0,$$

il faut recourir à l'équation

$$f''(1).k^2 + 2f'_1(1).k + 2f_2(1) = 2k^2 + 2k - 12 = 0.$$

Elle a pour racines $+2$ et -3, ce qui fournit les deux asymptotes

$$y = x + 2, \quad y = x - 3.$$

§ III.

COORDONNÉES POLAIRES.

137. La première condition pour l'existence d'une asymptote est celle d'une branche ouverte, ou d'un rayon vecteur infini. On cherchera donc d'abord les valeurs finies α de l'azimut θ qui rendent r infini ; et α sera l'inclinaison de l'asymptote sur l'axe polaire. En effet, le rayon vecteur lui devient parallèle quand il la rencontre ainsi que la courbe à l'infini.

Si Δ désigne la distance de l'asymptote au pôle, son équation pourra être prise sous la forme

$$r \sin(\theta - \alpha) = \Delta.$$

Cette fonction conservant la valeur constante Δ, l'a encore quand on s'éloigne indéfiniment, et on peut écrire

$$\Delta = [r \sin(\theta - \alpha)]_{\alpha}.$$

Mais dans ces régions la courbe et la droite se confondent sauf les quantités négligeables, et on peut considérer cette expression comme formée à l'aide de l'équation de la courbe. Il suffira donc de la calculer et d'y faire $\theta = \alpha$, ce qui rend r infini et le second facteur nul. On évitera la forme

$o \times \infty$ par la règle connue (104) et on aura ainsi la valeur de Δ.

Si elle est finie et unique, elle fournit une seule asymptote; si elle est multiple, plusieurs asymptotes parallèles; si elle est nulle, une asymptote qui passe par le pôle. Enfin, si elle est infinie, elle indique l'absence d'asymptote et conduit à rejeter la valeur correspondante de α.

On peut, si on y trouve avantage, employer la formule plus simple

$$\Delta = [r(\theta - \alpha)]_\alpha,$$

car on a séparément (24, p. 128)

$$\left[\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\theta - \alpha}\right]_\alpha = 1.$$

138. Exemple. — Prenons l'équation des coniques rapportées au foyer et au grand axe

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

r devient infini pour

$$1 - e\cos\alpha = 0, \quad \cos\alpha = \frac{1}{e}.$$

Pour que cet angle soit réel, il faut d'abord que e ne soit pas inférieur à l'unité, ce qui exclut l'ellipse. L'angle n'étant d'ailleurs déterminé que par son cosinus, on obtient deux directions également inclinées sur l'axe.

On a ensuite (101)

$$\Delta = [r(\theta - \alpha)]_\alpha = \left[\frac{p(\theta - \alpha)}{1 - e\cos\theta}\right]_\alpha = \frac{0}{0} = \left[\frac{p}{e\sin\theta}\right]_\alpha$$

$$= \frac{p}{e\sin\alpha} = \frac{p}{e\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \frac{p}{e\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Pour que cette valeur soit finie, il faut en outre que e ne soit pas égal à l'unité, ce qui exclût encore la parabole. L'hyperbole seule a donc des asymptotes dont la distance au foyer a pour valeur

$$\Delta = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}-1}} = b,$$

c'est-à-dire le demi-axe imaginaire.

139. *Courbes algébriques.* — Lorsque l'équation est algébrique par rapport à r, on peut développer davantage la méthode. Considérant l'équation

$$f(\theta).r^m + f_1(\theta).r^{m-1} + f_2(\theta).r^{m-2} + \ldots = 0.$$

On verra d'abord comme au § 133 que les valeurs infinies de r correspondent aux racines de l'équation

$$f(\alpha) = 0.$$

Si maintenant nous remplaçons θ par $\alpha + \overline{\theta - \alpha}$ et que nous développions par la formule de Taylor, il viendra

$$\begin{aligned} & r^m\left[f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1}(\theta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{1.2}(\theta-\alpha)^2 + \ldots\right] \\ + & r^{m-1}\left[f_1(\alpha) + \frac{f'_1(\alpha)}{1}(\theta-\alpha) + \frac{f''_1(\alpha)}{1.2}(\theta-\alpha)^2 + \ldots\right] \\ + & r^{m-2}\left[f_2(\alpha) + \frac{f'_2(\alpha)}{1}(\theta-\alpha) + \frac{f''_2(\alpha)}{1.2}(\theta-\alpha)^2 + \ldots\right] \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Le premier terme est nul d'après la condition qui détermine α. En divisant par r^{m-1}, on pourra écrire en abrégé

$$r(\theta-\alpha).[f'(\alpha) + A(\theta-\alpha)] + [f_1(\alpha) + B(\theta-\alpha)] + \frac{C}{r} = 0.$$

Si maintenant on fait à la fois $\theta = \alpha$ et $r = \infty$, il reste

$$[r(\theta-\alpha)]_\alpha f'(\alpha) + f_1(\alpha) = 0,$$

d'où on tire (137)

$$\Delta = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

expression semblable à celle qui a été obtenue pour les coordonnées rectilignes et susceptible d'une discussion identique que je ne reproduirai pas.

140. Exemple. — Considérons la spirale hyperbolique qui a pour équation

$$r\theta = m,$$

$$f(\theta) = \theta, \quad f'(\theta) = 1, \quad f_1(\theta) = -m.$$

L'équation qui fournit α sera

$$f(\alpha) = \alpha = 0,$$

elle montre que l'asymptote est parallèle à l'axe. On a ensuite

$$\Delta = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = m,$$

sa distance à l'axe est donc égale au paramètre.

CHAPITRE III.

COURBURE.

141. *Cercle osculateur.* — Pour nous représenter d'une manière nette la direction d'une courbe en un point, nous lui avons substitué une ligne pour laquelle cet élément reste invariable, c'est-à-dire une droite. Et nous l'avons assujettie à avoir dans le voisinage le plus possible de points communs avec la courbe, c'est-à-dire un second outre le point proposé. Nous avons ainsi obtenu la tangente.

Pour acquérir une notion plus complète, il faut encore apprécier la courbure de la ligne en ce point. En suivant la même idée, nous substituerons à la courbe une ligne sur laquelle cet élément reste invariable, c'est-à-dire un cercle. Il faudra en outre établir entre eux le contact le plus intime possible, et comme trois points déterminent un cercle, l'assujettir à passer, non-seulement par le point que l'on considère, mais encore par deux autres infiniment voisins.

On obtient ainsi le *cercle osculateur* ou *cercle de courbure* de la ligne proposée. Son centre et son rayon sont aussi appelés *centre* et *rayon de courbure*. Nous désignerons ce dernier par ρ, et par ξ, η, les coordonnées du centre.

142. L'équation du cercle sera alors

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=\rho^2.$$

Pour exprimer qu'il passe au point considéré (x, y), nous aurons la relation

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2.$$

Pour le point voisin, il faudrait de même substituer à X et Y : $x + dx$ et $y + dy$. Mais si, après avoir fait cette opération, on retranchait la dernière relation, on formerait l'accroissement qui résulte pour le premier membre des variations dx et dy, c'est-à-dire sa différentielle. Nous aurons donc une relation équivalente en différentiant l'équation, ce qui donne

$$(x - \xi) + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0.$$

C'est là un principe général, et quand une formule exprime qu'un certain fait géométrique a lieu en un point d'une courbe, il suffit de la différentier pour qu'il ait encore lieu au point voisin.

Pour faire passer le cercle en un nouveau point infiniment rapproché, nous n'aurons donc qu'à différentier de nouveau

$$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

On tire de là

$$(36) \qquad y - \eta = -\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et, par suite, de la relation précédente

$$(37) \qquad x - \xi = \frac{dy}{dx}\,\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Si nous substituons ces deux valeurs dans la première équation, il vient

$$\rho^2 = \left\{\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\}^2 \left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\} = \frac{\left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}^3}{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2},$$

et en extrayant la racine

$$(38) \qquad \rho = \frac{\left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Il suffirait de reporter ces trois expressions dans la formule ci-dessus pour avoir l'équation générale du cercle osculateur, mais elle est sans intérêt.

143. Il n'est même pas nécessaire de se fixer dans la mémoire les trois valeurs que nous venons d'obtenir. La dernière suffit. En effet, le cercle et la courbe ont trois points, et, par suite, deux éléments communs. Ils ont donc deux normales communes. Mais les normales du cercle sont ses rayons et passent par son centre. Le centre de courbure est ainsi déterminé par l'intersection de deux normales infiniment voisines, et se trouve par suite sur la normale du point considéré.

Or nous savons trouver la normale (**119**). Il suffira donc d'y porter la longueur ρ pour obtenir à l'extrémité le centre de courbure. Quant au sens dans lequel il faut prendre cette longueur, c'est pour la courbe comme pour le cercle dans la concavité. Il n'y aura ainsi d'ambiguïté qu'aux inflexions. Mais alors (**123**) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ρ devient infini et le centre disparaît. Avec cette manière de voir, l'expression (38) représente une longueur absolue et on fait abstraction de son signe.

144. Exemple I. — Si on se reporte à l'expression (30, p. 149) de la normale N, on pourra écrire ainsi la valeur générale (38) du rayon de courbure

$$\rho = \frac{N^3}{y^3 \frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Prenons comme exemple l'équation des trois coniques

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

on en tire, en différentiant deux fois de suite,

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx,$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = q.$$

Élevons la première au carré et multiplions la seconde par y^2,

$$y^2\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2,$$

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} + y^2\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = qy^2 = 2pqx + q^2x^2;$$

retranchant,

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2,$$

et comme nous faisons abstraction du signe,

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Ainsi dans les coniques le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.

Exemple II. — En se reportant encore à la valeur de la normale, on peut aussi mettre la valeur générale du rayon de courbure sous cette autre forme

$$\rho = N\,\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Appliquons à l'équation de la *chaînette*

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On en tire

$$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4},$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4},$$

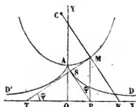
et, par suite,

$$\rho = \text{N}.$$

Ainsi dans la chaînette le rayon de courbure est égal à la normale.

Il ne s'ensuit pas que le centre de courbure soit sur l'axe des x, car la courbe lui tourne sa convexité, puisque $\frac{d^2y}{dx^2}$

Fig. 8.



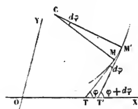
est positif. Il faut pour avoir ce centre C reporter la longueur MN de la normale de l'autre côté du point d'incidence.

145. *Courbure.* — On appelle *angle de contingence* celui que fait une tangente quelconque avec une droite fixe.

Si on adopte, pour plus de simplicité, l'axe des x, cet angle ne diffère pas de l'inclinaison φ.

La *courbure d'un arc* sans inflexion est l'angle compris entre ses tangentes extrêmes, c'est-à-dire la différence de

Fig. 9.



leurs angles de contingence, car ceux-ci sont les angles extérieur et intérieur d'un triangle dont le premier forme le sommet. C'est la quantité dont la courbe a dévié de la ligne droite dans cet intervalle. La courbure d'un arc infiniment petit de longueur ds sera par suite la différentielle $d\varphi$ de l'angle de contingence. Il est clair que la forme sera plus ou moins accusée en cet endroit, suivant qu'une déviation plus ou moins grande $d\varphi$ sera réalisée sur une longueur ds plus ou moins courte. Si donc on prend le rapport $\frac{d\varphi}{ds}$, il mesurera ce degré d'accentuation. On l'appelle, pour cette raison, la *courbure au point considéré.*

On en peut donner une expression très-simple. Si nous menons pour cela les tangentes MT, M'T' aux extrémités de l'arc élémentaire MM', elles comprendront entre elles l'angle $d\varphi$. Les deux normales MC, M'C, qui leur sont respectivement perpendiculaires, formeront un angle égal $d\varphi$. Or on peut dans cet intervalle confondre la courbe avec son cercle osculateur et considérer MM' ou ds comme un arc de cercle qui a son centre en C, c'est-à-dire ρ pour rayon et

$d\varphi$ pour angle au centre. On a, par suite,

$$ds = \rho d\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

La courbure est donc égale à l'inverse du rayon de courbure.

146. On peut aussi tirer de là

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi},$$

expression du rayon de courbure plus simple que la précédente et qui peut être utile dans plusieurs circonstances.

Exemple I. — On s'en sert notamment lorsqu'une ligne est définie par une équation entre son arc s et son angle de contingence φ.

Par exemple, lorsqu'on cherche la courbe suivant laquelle se dispose un fil pesant et flexible, et qu'on appelle la *chaînette*, les théorèmes de la statique fournissent facilement l'équation (¹)

$$s = \tan g \varphi.$$

On en tire immédiatement

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

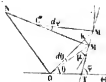
Exemple II. — On emploie aussi avec avantage cette formule pour des considérations directes de géométrie infinitésimale.

Cherchons, par exemple, le rayon de courbure des spirales sinusoïdes.

(¹) Nous montrerons plus tard (**228**) que cette équation est bien une conséquence de celle que nous avons déjà considérée (**144**, II).

Prenons pour cela un arc infiniment petit MM′, menons les rayons vecteurs OM, OM′, les normales MC, M′C qui

Fig. 10.



fournissent en C le centre de courbure et en MC le rayon de courbure ρ; élevons la perpendiculaire ON sur le rayon vecteur qui donne en MN la normale N de la courbe (129). Enfin abaissons MK perpendiculaire sur OM′.

Les triangles MKM′, MON seront semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, à savoir : la normale MN sur la tangente MM′, le rayon OM sur MK qui a été mené à angle droit sur la ligne infiniment voisine OM′, enfin ON sur M′K qui diffère infiniment peu de OM. On a donc la proportion

$$\frac{\text{MM}'}{\text{MK}} = \frac{\text{MN}}{\text{MO}},$$

$$\frac{\rho\, d\varphi}{r\, d\theta} = \frac{\text{N}}{r}.$$

Mais on a dans le triangle MOT (128, II)

$$\varphi = \theta + \mu = \theta + n\theta = (n+1)\theta,$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = n + 1;$$

d'où

$$\rho = \frac{\text{N}}{n+1}.$$

Ainsi dans les spirales sinusoïdes d'ordre quelconque n le

rayon de courbure est égal au multiple $\frac{1}{n+1}$ de la normale.

147. *Coordonnées polaires.* — Un moyen fort simple d'obtenir l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires consiste à changer de variables en remplaçant x et y par r et θ. Ce calcul a été déjà effectué à une autre occasion, et il suffit d'en rappeler le résultat. Nous avons trouvé (62)

$$\rho = \frac{\left\{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}.$$

Exemple. — Si nous prenons comme application la spirale logarithmique

$$r = m^\theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = m^\theta Lm = r Lm, \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = m^\theta L^2 m = r L^2 m,$$

il vient, en substituant et réduisant,

$$\rho = r\sqrt{1 + L^2 m},$$

ou, d'après (128),

$$\rho = r\sqrt{1 + \cot^2\mu} = \frac{r}{\sin\mu}.$$

Mais on a dans le triangle rectangle OMC (*fig.* 7, p. 156)

$$MC = \frac{OM}{\cos OMC} = \frac{OM}{\sin OMS} = \frac{r}{\sin\mu}.$$

Par suite, le rayon de courbure est égal à la normale, et le centre de courbure se trouve à l'intersection de la normale et de la perpendiculaire élevée par le pôle sur le rayon vecteur.

CHAPITRE IV.

ENVELOPPES.

§ I.

COURBES ENVELOPPES.

148. Lorsqu'une équation renferme, outre les coordonnées courantes X, Y, un *paramètre* ou constante arbitraire a susceptible de recevoir toutes les valeurs que l'on voudra, elle représente pour chacune de ces valeurs une certaine courbe, et par suite pour tout l'ensemble une *famille* de courbes.

C'est ainsi, par exemple, que les équations

$$Y = a, \quad Y = aX, \quad X^2 + Y^2 = a^2,$$

fournissent des familles de droites parallèles, de droites convergentes, de cercles concentriques, etc.

Il peut arriver, comme dans les exemples précédents, que la famille recouvre la totalité du plan de telle façon qu'il n'y ait pas un point par lequel on ne puisse faire passer une de ses courbes. Mais il arrive aussi le plus ordinairement qu'elle n'occupe qu'une portion du plan. Les contours qui la terminent sont alors appelés l'*enveloppe* de la famille, chacune de ses courbes prenant le nom d'*enveloppée*.

Si, par exemple, on envisage tous les cercles d'un même rayon qui ont leurs centres disposés sur la circonférence d'un autre cercle, de rayon plus grand pour fixer les idées, il est clair qu'ils ne couvriront qu'une couronne circulaire.

L'enveloppe est formée dans ce cas de deux cercles concentriques au proposé, qui ont pour rayons la somme et la différence des deux autres.

L'enveloppe d'une famille de courbes peut être envisagée à un autre point de vue. Puisqu'elle forme la limite entre la portion occupée par les enveloppées et celle qui ne l'est pas, chacune d'elles vient s'y appuyer, et comme elle ne la franchit pas, elle lui est tangente [1]. Si donc on prend deux enveloppées voisines, elles se couperont près de l'enveloppe, et si elles deviennent infiniment voisines, leur point d'intersection se rapprochera de cette courbe jusqu'à une distance du second ordre [2] et pourra être considéré comme y étant situé. L'enveloppe peut donc être envisagée comme *le lieu des intersections successives* des enveloppées, et c'est à ce point de vue que nous allons entreprendre sa recherche.

149. *Premier cas.* — Donnons-nous l'équation de la famille sous la forme

$$f(X, Y; a) = 0. \tag{39}$$

Si nous attribuons à a une valeur déterminée, nous aurons l'équation d'une certaine enveloppée. Pour connaître le point de l'enveloppe qui lui correspond, il faut la couper par l'enveloppée infiniment voisine qui sera représentée par

$$f(X, Y; a + da) = 0. \tag{40}$$

Nous trouverons les coordonnées X, Y de l'intersection en

---

(1) J'écarte bien entendu les cas où l'enveloppe serait formée par une série de points singuliers des enveloppées.

(2) Un point pris sur une courbe infiniment près du point de contact est à une distance du second ordre de la tangente. Car cette distance peut être assimilée à un arc de cercle qui serait décrit autour du point de contact avec la corde pour rayon ; et ce rayon ainsi que l'angle au centre sont tous deux infiniment petits. Il en sera par suite de même pour deux courbes tangentes, puisque la distance est pour chacune d'elles du second ordre par rapport à la tangente commune.

résolvant ces deux équations. Pour avoir le lieu de ces points, il faudrait ensuite éliminer entre les deux valeurs ce qui caractérise l'enveloppée particulière dont on s'est occupé, c'est-à-dire la valeur de a. Mais il reviendra au même de l'éliminer entre les relations (39) et (40), d'où ces valeurs ont été déduites. Nous pouvons même substituer à ces équations toutes celles plus avantageuses qui en seraient la conséquence. Or, si nous retranchons (39) de (40), nous formerons l'accroissement qui résulte pour f de la seule variation de a, c'est-à-dire sa différentielle partielle relative à a. Je remplacerai donc la relation (40) par la suivante

$$\left(\frac{df}{da}\right) da = 0,$$

ou, comme da n'est pas nul,

$$\left(\frac{df}{da}\right) = 0, \tag{41}$$

et l'élimination de a devra s'effectuer entre (39) et (41). De là la règle suivante :

Pour trouver l'enveloppe d'une famille de courbes dont on a l'équation, il suffit d'éliminer le paramètre entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à ce paramètre.

150. On remarquera que cette théorie est douée d'une généralité beaucoup plus grande que les premières, car rien dans ce qui précède ne fixe la nature des coordonnées qui peuvent être rectilignes, polaires, bipolaires, etc., sans que rien soit changé à nos raisonnements; tandis que les autres théories revêtent une forme particulière pour chaque système de coordonnées.

Exemple. — Cherchons l'enveloppe des droites qui sont à une même distance d'un point fixe.

Leur équation sera en coordonnées polaires

$$r \sin(\theta - a) = p.$$

Je forme la dérivée relative à a

$$-r \cos(\theta - a) = 0,$$

r n'étant pas nul puisque aucun des points des enveloppées ne se trouve au pôle, le cosinus doit être nul. Donc le sinus est l'unité et on a

$$r = p,$$

équation d'un cercle de rayon p.

151. *Second cas.* — Supposons maintenant que l'équation renferme deux paramètres,

$$(42) \qquad f(X, Y; a, b) = 0.$$

Comme un seul des deux doit rester arbitraire pour qu'il y ait une série continue de courbes, il existera entre ces paramètres une relation

$$(43) \qquad F(a, b) = 0.$$

Si on attribue à a et b deux valeurs qui satisfassent aux relations (42) et (43), on aura une certaine enveloppée. La voisine aura pour équation

$$(44) \qquad f(X, Y; a + da, b + db) = 0,$$

db restant lié à da par la condition

$$(45) \qquad F(a + da, b + db) = 0.$$

Nous aurions le point correspondant de l'enveloppe en calculant X et Y d'après les équations (42), (44), et leur lieu en éliminant a et b, da et db entre ces valeurs et les rela-

tions (43) et (45). Mais nous pouvons faire directement l'élimination entre les quatre équations (42, 43, 44, 45) et même remplacer les deux dernières par celles qu'on obtient en en retranchant les précédentes, à savoir

$$\left(\frac{df}{da}\right) da + \left(\frac{df}{db}\right) db = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{da}\right) da + \left(\frac{dF}{db}\right) db = 0.$$

Or on peut faire disparaître da et db une fois pour toutes, car en égalant les deux valeurs du rapport $\frac{db}{da}$, il vient

(46) $$\frac{\left(\frac{df}{da}\right)}{\left(\frac{df}{db}\right)} = \frac{\left(\frac{dF}{da}\right)}{\left(\frac{dF}{db}\right)},$$

et la question est réduite à l'élimination de a et b entre les équations (42), (43) et (46).

152. Exemple I. — Cherchons l'enveloppe d'une droite qui se meut de manière à intercepter dans un angle φ un triangle dont la surface reste constante et égale à m^2.

Si nous prenons les côtés de l'angle comme axes de coordonnées obliques, l'équation de l'enveloppée sera

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1,$$

en désignant par a et b ses coordonnées à l'origine qui forment ici les paramètres arbitraires. Nous avons entre eux la relation

$$\frac{1}{2} ab \sin\varphi = m^2,$$

$$ab = \frac{2m^2}{\sin\varphi}.$$

En différentiant les deux équations par rapport aux para-

mètres, il vient

$$-\frac{X\,da}{a^2}-\frac{Y\,db}{b^2}=0,$$

$$udb+bda=0;$$

ce qu'on peut écrire

$$X\frac{da}{a^2}=-Y\frac{db}{b^2},$$

$$adb=-bda;$$

d'où en multipliant membre à membre

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}.$$

Comme la somme de ces quantités donne d'ailleurs l'unité d'après la première équation, chacune d'elles est égale à $\frac{1}{2}$. Par suite

$$a=2X,\quad b=2Y,$$

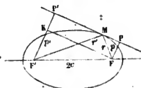
et, en substituant dans la relation paramétrique

$$XY=\frac{m^2}{2\sin\varphi},$$

équation d'une hyperbole qui a pour asymptotes les côtés de l'angle donné.

153. Exemple II. — Cherchons l'enveloppe des droites

Fig. 11.



telles, que le produit de leurs distances p, p', à deux points

fixes reste constant et égal à b^2

(47) $$pp' = b^2.$$

Si nous employons des coordonnées bipolaires r, r' dont les points donnés soient les deux foyers, on aura identiquement

$$\text{MP} + \text{MP}' = \text{FK},$$

et d'après les triangles rectangles MPF, MP'F', FKF'

$$\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r'^2 - p'^2} = \sqrt{4c^2 - (p - p')^2}.$$

Telle est l'équation de l'enveloppée. On peut, en élevant deux fois de suite au carré, la mettre sous la forme

(48) $$4(p^2r'^2 + p'^2r^2) = 4(r^2r'^2 + b^4) - (r^2 + r'^2 - 4c^2 - 2b^2)^2.$$

En différentiant les équations (47) et (48) par rapport aux paramètres p et p', il vient

$$p'\,dp + p\,dp' = 0, \quad r'^2p\,dp + r^2p'\,dp' = 0.$$

On en tire par l'élimination du rapport $\frac{dp}{dp'}$ la troisième relation

(49) $$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'},$$

et il reste à éliminer les paramètres p, p', entre (47), (48) et (49).

Or on obtient, en combinant la première et la troisième,

$$p^2 = b^2\frac{r}{r'}, \quad p'^2 = b^2\frac{r'}{r},$$

$$p^2r'^2 = p'^2r^2 = b^2rr',$$

et en reportant dans la seconde

$$4(r^2r'^2 + b^4 - 2b^2rr') - (r^2 + r'^2 - 4c^2 - 2b^2)^2 = 0.$$

On reconnaît dans la première partie le carré de $2(rr'-b^2)$, ce qui permet de décomposer ainsi l'équation

$$(r^2+r'^2-4c^2-2b^2-2rr'+2b^2)\times$$
$$(r^2+r'^2-4c^2-2b^2+2rr'-2b^2)=0.$$

Le premier facteur doit être rejeté car il conduit à

$$r-r'=2c,$$

tandis que r, r' et $2c$ sont les trois côtés du triangle FMF'. Le second donne

$$r+r'=2\sqrt{b^2+c^2},$$

équation bipolaire d'une ellipse qui a pour foyers ceux du système, et pour petit axe b.

154. *Troisième cas.* — Supposons le cas le plus général, où la famille de courbes est représentée par une équation (E) entre X, Y, et n paramètres a, b, c, ..., qui sont liés d'ailleurs par $n-1$ conditions (E_1), (E_2) ..., (E_{n-1}).

Pour un système de valeurs des paramètres, on obtient une enveloppée. En leur substituant $a+da$, $b+db$, $c+dc$, ..., on forme un système (E'), (E'_1), (E'_2), ..., (E'_{n-1}), qui représente l'enveloppée voisine. Le lieu de leur intersection s'obtiendra, comme on a vu, en éliminant entre ces relations les quantités a, b, c, ...; da, db, dc, ... Nous pouvons pour cela substituer aux dernières équations celles qu'on en déduit par la soustraction des précédentes, c'est-à-dire les différentielles (E''), (E''_1), (E''_2), ..., (E''_{n-1}), de (E), (E_1), (E_2), ..., (E_{n-1}), prises par rapport aux paramètres seulement.

Or la moitié de l'élimination peut toujours être effectuée, car les n équations (E''), (E''_1), (E''_2), ..., (E''_{n-1}), renferment au premier degré les n différentielles da, db, dc, ..., ou en divisant par da les $n-1$ dérivées $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{da}$, ... Si donc on fait

disparaître ces dernières, on remplacera tout ce système partiel par une équation de condition. En la joignant à l'équation de la famille (E) et aux $n-1$ équations paramétriques $(E_1), (E_2), \ldots, (E_{n-1})$, on aura en tout $n+1$ relations. Il n'y aura plus alors qu'à éliminer entre elles les n paramètres et on obtiendra une équation résultante entre X et Y, qui sera celle de l'enveloppe.

§ II.

DÉVELOPPÉES.

155. *Enveloppes des normales.* — On appelle *développée* d'une courbe plane l'enveloppe de ses normales.

La recherche des développées rentre donc immédiatement dans la théorie précédente. L'équation de la famille sera celle de la normale à la courbe (119), et renfermera comme paramètres les coordonnées x, y du point d'incidence; la relation des deux paramètres sera l'équation même de la courbe; et il suffira d'appliquer les procédés du second cas (151).

Il est clair que cette méthode convient encore à tous les systèmes de coordonnées dans lesquels on saura déterminer la normale.

156. Exemple. — Cherchons la développée de la parabole

$$(50) \qquad y^2 = 2px,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

Formons l'équation de la normale (119)

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x) = -\frac{y}{p}(X - x),$$

$$(51) \qquad p(Y - y) + y(X - x) = 0.$$

En différentiant par rapport aux paramètres x, y, il vient

$$-p\,dy + (X-x)\,dy - y\,dx = 0,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X-x-p}{y},$$

et en égalant les deux rapports différentiels

(52) $$\frac{y}{p} = \frac{X-x-p}{y}.$$

Il reste à éliminer x et y entre les relations (50), (51) et (52).

Or on tire de (52) et (50)

$$p(X-x-p) = y^2 = 2px,$$

$$x = \frac{X-p}{3}.$$

Alors la formule (51) donne

$$p(Y-y) + y\left(X - \frac{X-p}{3}\right) = 0,$$

$$y = \frac{3}{2}\,\frac{pY}{p-X},$$

et en substituant dans (50)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{p^2Y^2}{(p-X)^2} = 2p.\frac{X-p}{3},$$

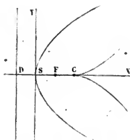
$$pY^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (X-p)^3,$$

équation d'une seconde parabole cubique qui a le même axe que la proposée, et son rebroussement au point symétrique du sommet de la parabole par rapport au foyer (*fig.* 12, p. 190).

157. *Lieu des centres de courbure.* — On a vu (143)

que deux normales consécutives donnent par leur intersection le centre de courbure. Le lieu des intersections suc-

Fig. 12.



cessives des normales n'est donc autre que le lieu des centres de courbure.

De là une nouvelle manière d'envisager cette recherche. Elle consiste à recourir aux expressions générales trouvées pour les coordonnées ξ, η du centre de courbure (36, 37, p. 172)

$$\xi = x - \frac{dy}{dx}\,\frac{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\eta = y + \frac{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et à éliminer x et y entre ces formules et l'équation de la courbe. La relation résultante entre ξ, η représentera la développée.

Il ne serait pas difficile de montrer que non-seulement ces deux méthodes sont équivalentes au fond, mais encore qu'elles conduisent exactement aux mêmes calculs dans chaque cas. La dernière devient cependant distincte et

plus simple quand on peut se servir de considérations géométriques directes.

158. Exemple. — Cherchons, par exemple, la développée de la spirale logarithmique (*fig.* 7, p. 156). Nous avons reconnu (148) que son centre de courbure C se trouvait à l'intersection de la normale MC et de la perpendiculaire OC au rayon vecteur OM. Si donc r' et θ' désignent les coordonnées OC et COΘ du point C, nous aurons dans le triangle rectangle COM,

$$r = r' \operatorname{tang} \mu, \quad \theta = \theta' - \frac{\pi}{2},$$

et comme on a entre ces quantités les relations (128)

$$r = m^{\theta}, \quad \mu = \operatorname{arc} \cot Lm,$$

il vient

$$\frac{r'}{Lm} = m^{\theta' - \frac{\pi}{2}},$$

ce qu'on peut écrire

$$r' = Lm . e^{Lm\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{Lm\left(\theta' - \frac{\pi}{2} + \frac{LLm}{Lm}\right)} = m^{\theta' - \frac{\pi}{2} + \frac{LLm}{Lm}}.$$

Si donc on fait tourner l'axe polaire en posant

$$\theta'' = \theta' - \frac{\pi}{2} + \frac{LLm}{Lm},$$

il viendra

$$r' = m^{\theta''};$$

équation identique à la proposée. Ainsi la spirale logarithmique a pour développée une spirale égale tournée autour du pôle de l'angle complémentaire de $\frac{LLm}{Lm}$.

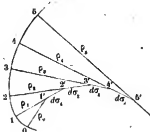
On peut chercher, d'après cela, une spirale qui soit sa propre développée, de façon que toute droite normale en un point lui soit tangente en un autre. Il suffira pour cela d'égaler l'angle de rotation à des circonférences entières qui ramèneront la courbe dans la même position. De là l'équation transcendante

$$\frac{\pi}{2} - \frac{LLm}{Lm} = 2k\pi$$

qu'il faudrait résoudre par rapport à Lm, et qui admet une infinité de racines, puisque k reste quelconque. La solution la plus simple correspond à $k = 1$ et fournit la spirale de 75 degrés environ.

159. *Rectification.* — Toute développée peut être rectifiée exactement; c'est-à-dire qu'on peut toujours assigner

Fig. 13.



une ligne droite d'une longueur égale à celle d'un arc quelconque de cette courbe.

Si nous prenons en effet deux points infiniment voisins 0 et 1 et que nous menions leurs normales, elles donneront en 1' le centre de courbure. On pourra alors considérer 01 comme un arc de cercle décrit autour de 1', et, par suite, ses deux rayons 11' et 01' comme égaux. D'après cela, le

rayon suivant 12′ se composera de 11′ ou 01′ et de 1′ 2′. Ce qui donne

$$\rho_1 = \rho_0 + d\sigma ,$$

en désignant par σ l'arc indéfini de développée. On aura de même

$$\rho_2 = \rho_1 + d\sigma_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_n = \rho_{n-1} + d\sigma_n.$$

En ajoutant membre à membre, il reste

$$\rho_n = \rho_0 + d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3 + \ldots + d\sigma_n,$$

ou plus simplement

$$\sigma = \rho - \rho_0,$$

ce qui montre que l'arc de développée est égal à la différence des rayons de courbure qui aboutissent à ses extrémités.

Ainsi donc quand une ligne est la développée d'une courbe connue, on peut la rectifier par le tracé de cette courbe. Nous saurons, par exemple, assigner la longueur d'un arc de seconde parabole cubique, puisque la construction des rayons de courbure qui aboutissent à ses extrémités n'exige que celle de ses tangentes que nous avons trouvée (118) et de leur intersection avec une parabole du second degré, qu'on peut toujours obtenir avec la règle et le compas.

Ce résultat n'est pas sans intérêt, car cette courbe est la première que les géomètres soient parvenus à rectifier.

160. Imaginons que la développée d'une ligne quelconque serve de contour à une règle courbe ou *pistolet*, qu'on attache en un de ses points l'extrémité d'un fil flexible et inextensible, enroulé sur le pistolet, et qu'on le déroule peu à peu en le maintenant toujours tendu. Ce fil se détache de la règle, suivant une tangente qui augmente

de longueurs égales à celles dont diminue la portion enroulée, puisque l'ensemble constitue la longueur invariable du fil. Un arc du pistolet est donc toujours égal à la différence des tangentes qui partent de ses extrémités, et, par suite, l'extrémité du fil décrit la courbe dont le pistolet forme la développée. De là un moyen de description mécanique pour une courbe plane quelconque.

C'est de cette propriété que dérive la dénomination de *développée*. La courbe qui lui donne naissance prend par rapport à elle le nom de *développante*. Une développante n'a qu'une développée, mais une développée a une infinité de développantes; car la longueur absolue du fil n'est pas déterminée et on peut l'arrêter par la pensée en chacun de ses points. Comme chaque position du fil est une normale de la développante considérée, il forme partout une normale commune à toutes les développantes. Ses différentes portions mesurent donc (120) la plus courte distance des développantes que décrivent leurs extrémités, et comme le fil est inextensible, ces distances restent constantes. Les développantes d'une même développée sont ainsi, à proprement parler, des *courbes parallèles,* dont la distance mutuelle reste partout la même.

On peut aussi les considérer toutes comme les enveloppes d'un cercle de rayon fixe, mais arbitraire, dont le centre décrirait l'une quelconque d'entre elles. Il est clair en effet que si le centre parcourt un arc infiniment petit qu'on peut considérer comme rectiligne, les éléments de l'enveloppe, c'est-à-dire les tangentes communes aux deux positions du cercle, seront parallèles entre elles et à l'arc parcouru. Elles auront donc la même normale, ce qui est le caractère des développantes d'une même développée.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE LA CYCLOIDE.

161. On a pu facilement se convaincre des ressources que la méthode infinitésimale trouve pour son application dans les procédés du calcul différentiel. Mais il ne faut pas oublier que ce calcul n'est que l'instrument, tandis que le principe même de l'emploi des infiniment petits constitue la méthode, dont on a pu également apprécier la puissance.

On peut aussi appliquer ce principe à des considérations directes de géométrie, de mécanique ou de physique mathématique, ce qui permet souvent d'éviter de longs calculs. Pour en montrer un exemple, je choisirai la théorie d'une courbe célèbre par les travaux auxquels elle a donné lieu.

Cette ligne est la *cycloïde*. On appelle ainsi la trajectoire que décrit un point de la circonférence d'un *cercle générateur* qui roule sur une droite sans glisser, c'est-à-dire de manière que les arcs dont il tourne soient égaux aux portions de cette droite sur lesquelles ils s'appliquent.

La cycloïde se compose d'une infinité de branches pareilles, dont on ne considère ordinairement qu'une seule (*fig.* 14, p. 196). Elle s'appuie sur la ligne droite par deux *rebroussements* de première espèce dont les tangentes sont verticales, et elle offre au point le plus haut un *sommet* où la courbure atteint son minimum. L'ordonnée de ce sommet est la *hauteur*, elle est égale au diamètre $2r$ du cercle générateur. L'intervalle des rebroussements est la *base*, elle a pour valeur la circonférence $2\pi r$.

162. *Tangente.* — Substituons au cercle un polygone régulier. Son roulement se composera d'une série de rotations autour des sommets qui se trouvent successivement en contact avec la base. Dans chacune d'elles le *point décrivant* se meut sur un cercle qui a son centre en ce sommet. La trajectoire est ainsi formée d'une série discon-

Fig. 14

tinue d'arcs de cercle. La normale de chacun d'eux passe en son centre, c'est-à-dire au point de contact correspondant.

Si maintenant nous supposons le nombre des côtés infini et ceux-ci infiniment petits, nous pouvons substituer le cercle au polygone, et la cycloïde à la série d'arcs de cercle dont elle forme l'enveloppe. Comme la normale n'a pas cessé de passer par le point de contact avec la base, on peut dire que *dans la cycloïde la normale s'obtient en joignant le point décrivant au point le plus bas du cercle générateur.*

Si nous tirons MT, l'angle en M sera inscrit sur le diamètre, MT sera donc perpendiculaire sur la normale, et, par suite, tangente. Donc *dans la cycloïde, la tangente s'obtient en joignant le point décrivant au point le plus haut du cercle générateur.*

163. *Développée.* — Je vais montrer que *la développée de la cycloïde est une cycloïde égale qu'on obtient en abaissant la proposée d'une quantité égale à sa hauteur, et la transportant parallèlement à la base d'une longueur égale à la moitié de cette base.*

Il me suffira pour cela de faire voir que la portion de cycloïde $RCR'R_1$ est l'enveloppe des normales de $RMSR_1$, ou qu'une normale quelconque de cette dernière est tangente à l'autre.

Je figure le cercle générateur MNT pour la position M du point décrivant. N étant son point le plus bas, MN sera la normale de la proposée. Je trace, d'autre part, le cercle NCN′ symétrique et égal, puisque les hauteurs sont les mêmes. Je le considère comme cercle générateur de la cycloïde inférieure, le point décrivant étant dès lors C.

Comme N est son point le plus haut, CN sera la tangente à cette cycloïde. La question est donc de faire voir que MN et NC sont en prolongement l'une de l'autre.

Or l'arc de cercle MN est égal à NR, puisque la cycloïde se décrit en appliquant sur la base des arcs de cercle égaux aux portions de cette base. Mais NR est la différence de RQ et NQ, c'est-à-dire d'une demi-circonférence ou de NCN′ et de N′R′ qui est égal à N′C pour la raison qui vient d'être expliquée. Cette différence est précisément l'arc CN.

Il est maintenant évident que les cordes NM, NC qui sont menées par le point de contact de deux cercles égaux, de manière à intercepter des arcs égaux, sont en prolongement l'une de l'autre. C. Q. F. D.

164. *Courbure.* — Le rayon de courbure est la portion de la normale MN comptée depuis le point d'incidence jusqu'à sa rencontre C avec la développée. Mais on vient de voir que les arcs NC et MN sont égaux, les cordes sont

par suite égales. D'où il suit que *dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale.*

Rectification. — La cycloïde RCR' peut maintenant être considérée comme une développée. Un arc RC sera donc égal à la différence des rayons de courbure qui aboutissent à ses extrémités (159). Mais le rayon de courbure qui est toujours double de la normale, s'annule en R. Par suite, l'arc RC est égal à MC ou au double de CN. Donc *dans la cycloïde l'arc est double de la tangente.* Il est entendu que l'on compte pour cela l'arc à partir du sommet, et la tangente jusqu'à la base supérieure.

Cette manière d'estimer l'arc ne particularise du reste en rien, car si on en veut mesurer un dont les extrémités soient quelconques, il suffit de l'envisager comme la différence de deux autres qui aboutissent du sommet à chacun de ces deux points.

Si nous considérons une demi-cycloïde, sa tangente est la hauteur ou le diamètre. Par suite, la *longueur totale de la cycloïde est égale à quatre fois le diamètre du cercle générateur.* Ainsi le clou d'une roue décrit deux fois plus de chemin que s'il s'élevait et s'abaissait verticalement.

165. *Quadrature.* — Si je prends un point m sur la cycloïde, la tangente mt aboutira au point le plus haut t du cercle générateur (162). J'y marque un point infiniment voisin m' que je peux aussi bien considérer comme situé sur la courbe, puisqu'il en est à une distance du second ordre (148, note 2). La similitude des triangles $mm'h$, mth donne la proportion

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{mh}{m'h} = \frac{mh}{th} = \frac{cb}{ma}.$$

On en déduit

$$ma \cdot aa' = cb \cdot bb'.$$

Le premier membre est la mesure du rectangle $mhaa'$ que l'on peut confondre avec le trapèze mixtiligne $mm'aa'$, car il n'en diffère que par une quantité qui est du second ordre, puisque ses deux dimensions sont infinitésimales. Le second membre mesure de même le trapèze mixtiligne $bb'cc'$. Il y a donc à chaque instant égalité entre les accroissements que reçoivent le triangle mixtiligne cycloïdal Sam et le demi-segment circulaire Sbc, lorsque le point m décrit la courbe. Mais ces deux surfaces sont nulles ensemble quand le point part de S, donc elles sont constamment égales. Par suite *l'aire de la cycloïde est égale au demi-segment correspondant du cercle générateur.*

Le triangle entier SP_1R_1 est ainsi égal au demi-cercle ScQ, et la somme des deux triangles $SPR + SP_1R_1$ à l'aire du cercle générateur. Or celle de la cycloïde RSR_1 s'obtient en retranchant cette somme du rectangle PP_1RR_1 qui a lui-même pour mesure le produit de la base $2\pi r$, par la hauteur $2r$ ou $4\pi r^2$. La différence est $3\pi r^2$, et, par suite, *l'aire de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur.*

166. *Centre de gravité* (1). — Si on cherche le centre de gravité de la cycloïde entière, on reconnaît d'abord qu'il est situé sur l'axe de symétrie, et il suffit de trouver sa distance à la base.

Nous venons de voir que les éléments $mm'aa'$ et $bb'cc'$ ont même surface. Le centre de gravité de ces rectangles infiniment étroits peut être considéré comme situé au milieu de leur longueur. Mais l'un est disposé horizonta-

(1) Les paragraphes suivants exigent quelques notions de mécanique, à la vérité des plus répandues. On pourra, si on le veut, les passer sans le moindre inconvénient, car ce sont des propositions détachées. Elles ont été placées ici tant pour compléter la théorie de la cycloïde que pour montrer quelques exemples de l'application directe de la méthode infinitésimale à d'autres sujets que la géométrie pure.

lement et l'autre verticalement, par suite la distance à la base supérieure sera pour $mm'aa'$ moitié de ce qu'elle est pour $bb'cc'$. Il en sera donc de même des moments de ces éléments, et, par suite, encore de même du moment total des aires qu'ils composent, à savoir le triangle SP_1R_1 et le demi-cercle SQ, ou encore l'ensemble des deux triangles $SPR + S_1P_1R_1$ et le cercle entier SQ. Les aires de ces deux espaces étant égales, d'après ce qui précède, le centre de gravité de la première doit être moitié plus près de la base supérieure que celui de la seconde. Mais celui-ci est au centre même du cercle, c'est-à-dire à une distance égale au rayon. Donc le centre de gravité de l'ensemble des deux triangles est au milieu du rayon supérieur.

D'après cela, les surfaces étant, pour le rectangle PP_1RR_1, pour l'ensemble des triangles $SPR + SP_1R_1$, et pour la cycloïde RSR_1, comme les nombres 4, 1, 3; et les distances de leurs centres respectifs à la base inférieure étant, d'après ce qui précède, r, $\frac{3}{2}r$ et x, on aura, en prenant les moments par rapport à cette base,

$$4.r = 1.\frac{3}{2}r + 3x,$$

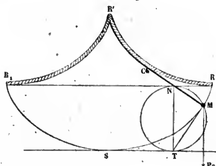
$$x = \frac{5}{6}r.$$

Ainsi *le centre de gravité de la cycloïde est situé aux cinq douzièmes de la hauteur.*

167. *Tautochrone.* — Imaginons un point pesant mobile dans la concavité d'une cycloïde, sans frottement. On peut réaliser par la pensée ce mouvement au moyen d'un fil flexible inextensible et sans masse, dont l'extrémité serait attachée en R' au rebroussement de la cycloïde $RR'R_1$, et dont la longueur serait de deux diamètres, c'est-à-dire

égale à la demi-cycloïde R′R (164). Nous avons établi, en effet (160), ce moyen général de description des courbes

Fig. 15.



au moyen de leur développée. Je vais montrer que ce *pendule cycloïdal* effectuera toutes ses oscillations dans le même temps, ce qu'on exprime en disant que la cycloïde est *tautochrone*. Cette proposition, que l'on énonce souvent pour le pendule *simple* ou *circulaire*, n'est alors qu'approximative et bornée aux très-petites amplitudes. Elle est, au contraire, entièrement rigoureuse pour la cycloïde depuis les plus petits écarts jusqu'à l'oscillation complète qui ferait parcourir au mobile la totalité de la courbe.

Évaluons la force tangentielle qui détermine seule la loi du mouvement sur une courbe fixe. Elle aura pour valeur le produit du poids constant par le cosinus de l'angle que fait la verticale avec la tangente MT, c'est-à-dire de l'angle MTN. Celui-ci s'exprime dans le triangle rectangle par le rapport de MT à TN. Mais TN est constant et égal à la hauteur, donc la force est proportionnelle à la tangente MT ou à l'arc MS qui en est le double (164). Ainsi la force tangentielle varie, à chaque instant, en raison du chemin qui reste à parcourir pour atteindre le sommet.

D'après cela, imaginons deux mobiles qui partent ensemble sans vitesse initiale de deux points quelconques de la cycloïde. Leurs distances au sommet, estimées suivant la trajectoire, sont proportionnelles aux forces tangentielles qui les sollicitent ou aux accélérations tangentielles qui sont le quotient de ces forces par les masses. Or ces accélérations peuvent être considérées comme constantes pendant un intervalle de temps élémentaire, en négligeant vis-à-vis d'elles leur variation qui est nécessairement infiniment petite. Le mouvement élémentaire est donc uniformément accéléré, et, par suite, les vitesses acquises, proportionnelles aux accélérations, ainsi que les chemins décrits. On voit ainsi que les distances ont diminué de quantités qui leur sont proportionnelles. Elles ont donc conservé leur rapport et les mobiles se retrouvent dans les mêmes conditions, sauf qu'ils sont en outre animés de vitesses initiales qui sont aussi dans ce même rapport.

Dans le second intervalle de temps, les choses se passeront de même pour ce qui concerne la force. Quant aux espaces décrits en raison des vitesses acquises, ils seront proportionnels à ces vitesses, c'est-à-dire toujours dans le même rapport. De sorte que les distances au sommet auront encore conservé ce rapport à la fin du second élément de temps, et ainsi de suite.

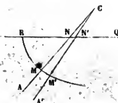
On voit donc que les deux distances resteront constamment proportionnelles, et, par suite, qu'elles s'annuleront ensemble, ou que les deux mobiles atteindront le sommet en même temps. D'où il suit que *toutes les oscillations du pendule cycloïdal ont la même durée.*

168. *Brachistochrone.* — La cycloïde jouit encore d'une autre propriété importante, relative au mouvement des corps pesants. Elle est la *brachistochrone* ou la *courbe de*

plus vite descente. On en peut rendre compte assez simplement de la manière suivante.

Représentons par QR le niveau d'où le mobile part sans vitesse initiale. Figurons un angle quelconque ACA' infiniment petit, et cherchons la manière dont le corps doit

Fig. 16.



traverser cet angle pour que ce soit dans le plus bref délai possible. Si l'on savait d'abord en quel point M le mobile atteint le côté CA, il est clair qu'il devrait alors se mouvoir suivant une droite MM' menée perpendiculairement sur CA', car c'est ainsi qu'il atteindrait cette droite par le chemin le plus court avec la vitesse qu'il a acquise lorsqu'il arrive en M. Mais l'angle C est infiniment petit, par suite MM' est perpendiculaire aussi bien sur CA que sur CA', et ces deux droites peuvent être considérées comme deux normales consécutives de la trajectoire. Le point C sera donc le centre et MC le rayon de courbure. Il reste à trouver le rapport qui doit exister entre la distance $MN = x$ et la longueur fixe $NC = l$.

Or, le temps du parcours de MM' sera, à vitesse égale, proportionnel à cet élément, et celui-ci à la distance $l + x$, qui le sépare du centre C. Il sera, au contraire, en raison inverse de la vitesse que le mobile possède en arrivant en M. Celle-ci étant due à la hauteur qui sépare M du niveau QR du point de départ, sera proportionnelle à la racine carrée de cette hauteur et par suite à $\sqrt{x}$. En définitive, le

temps en question peut s'exprimer, sauf des facteurs constants, par

$$\frac{l+x}{\sqrt{x}} = \frac{l}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

Telle est la quantité qu'il faut rendre minimum par un choix convenable de la valeur de x.

Or elle est la somme de deux termes dont le produit est constant et égal à l; elle sera donc minimum (87) quand ces deux termes seront égaux,

$$\frac{l}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x = l.$$

Ainsi NC est égal à MN ou MC double de MN. Le rayon de courbure est donc double de la normale MN en arrêtant celle-ci à la ligne fixe QR. Il suit de là (164) que *la brachistochrone est une cycloïde renversée, déterminée par la condition d'avoir son rebroussement au point de départ et de passer par le point d'arrivée.*

CHAPITRE VI.

COURBES GAUCHES.

§ I.

FORMULES GÉNÉRALES.

169. On appelle *lignes à double courbure* ou *courbes gauches* celles qu'il n'est pas possible de faire tenir dans un plan. Nous les rapporterons à trois axes coordonnés quelconques. Nous considérerons x comme la variable indépendante; y et z en seront deux fonctions, d'après les équations de la courbe.

La *tangente* se définit pour une ligne gauche comme pour une ligne plane. Nous l'euvisagerons comme une droite menée par deux points de la courbe infiniment voisins. Les projections de ces points appartiendront à la projection de la courbe, la droite qui les joint sera la projection de la tangente, et comme elle aura deux points communs avec la projection de la courbe, elle sera tangente à cette projection. Ainsi les projections de la tangente sont les tangentes de la projection.

Nous rentrons par là dans le problème des tangentes aux lignes planes, ce qui donne pour les équations de la tangente (117),

$$(53) \qquad \frac{dx}{X-x}=\frac{dy}{Y-y}=\frac{dz}{Z-z}.$$

Dans ces formules dx, dy, dz, ou plutôt leurs rapports, doivent être tirés des équations des projections de la

courbe, ou des deux équations de cette courbe, quelle que soit leur forme.

170. On appelle *plan normal* celui qui est mené par un point de la courbe à angle droit sur la tangente. Toutes les droites qu'on y trace par le *point d'incidence* sont des perpendiculaires à la tangente qu'on appelle *normales*.

Si nous nous bornons aux coordonnées rectangulaires, les coefficients des variables devront être réciproques de ceux de la tangente, c'est-à-dire égaux à dx, dy, dz. Comme du reste le plan doit passer au point (x, y, z), il aura pour équation

$$(54) \qquad (X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0.$$

171. Concevons qu'un plan soit mené par la tangente, de manière à rencontrer encore la courbe dans le voisinage. Si on le fait tourner autour de cette droite dans le sens convenable, la seconde intersection ira en se rapprochant du point considéré et finira par le dépasser. En arrêtant le plan dans la position précise où cette intersection disparaît momentanément, on obtient le *plan osculateur*. Nous pouvons le considérer comme mené par la tangente et un point infiniment voisin du point de contact ou encore par deux tangentes infiniment voisines.

La condition de passer au point (x, y, z) fournit pour des coordonnées quelconques l'équation

$$(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0;$$

celle de contenir la tangente qui a pour équations (53) donne, en substituant à $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, les quantités proportionnelles dx, dy, dz,

$$dx + mdy + ndz = 0.$$

Pour que le plan renferme encore la tangente voisine, il suffit, d'après une remarque générale (142), de différentier cette relation

$$md^2y + nd^2z = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on en tire

$$m = -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad n = +\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}};$$

en substituant et chassant le dénominateur, on obtient l'équation du plan osculateur

$$(55)\ (X-x)\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - (Y-y)\frac{d^2z}{dx^2} + (Z-z)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

On a coutume de distinguer entre toutes les normales celle qui est située dans le plan osculateur. On l'appelle *normale principale*.

Comme toute normale est située dans le plan normal, celle-ci résultera de son intersection avec le plan osculateur. La normale principale se trouve ainsi représentée par les équations (54) et (55).

172. Pour apprécier la courbure d'une ligne gauche en un de ses points, on lui substitue encore le *cercle osculateur* qui a avec elle le contact le plus intime possible, c'est-à-dire trois points infiniment voisins communs. Je désignerai par ρ son rayon ou le *rayon de courbure*, et par ξ, η, ζ les coordonnées du *centre de courbure*.

Le plan de ce cercle passant par trois points infiniment voisins n'est autre que le plan osculateur. Ainsi l'une des équations du cercle sera (55). Nous déduisons immédiatement de là une relation entre les inconnues, car le centre

du cercle étant situé dans son plan, ses coordonnées ξ, η, ζ doivent satisfaire à l'équation (55), ce qui donne

$$(56)\quad (\xi - x)\left[\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] - (\eta - y)\frac{d^2z}{dx^2} + (\zeta - z)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Si nous considérons, en outre, le cercle osculateur comme le grand cercle d'une sphère, on pourra prendre pour sa seconde équation celle de cette sphère,

$$(57)\qquad (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2 = \rho^2.$$

Pour exprimer qu'elle passe au point considéré et à deux autres infiniment voisins, nous substituerons aux coordonnées courantes X, Y, Z celles x, y, z de ce point et nous différentierons deux fois (142). Il vient ainsi

$$(58)\qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \rho^2,$$

$$(59)\qquad (x - \xi) + (y - \eta)\frac{dy}{dx} + (z - \zeta)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$(60)\qquad 1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - \zeta)\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Il est facile de tirer de ces quatre équations les inconnues ξ, η, ζ et ρ. Car les trois premières entrent seules et au premier degré dans les formules (56, 59, 60), après quoi l'équation (58) fournit l'expression de ρ. Cette dernière valeur peut suffire à elle seule, car on obtiendra le centre de courbure en la portant sur la normale principale dans le sens de la concavité. En effectuant ce calcul dont je supprime le détail, on trouve

$$(61)\quad \rho = \sqrt{\frac{\left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2\right\}^3}{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2}},$$

quantité que l'on considérera comme essentiellement positive.

173. On peut trouver le *lieu des centres de courbure* d'une ligne gauche. Car si on joint aux trois expressions des coordonnées ξ, η, ζ du centre pour le point (x, y, z) les deux équations de la courbe, et qu'on élimine entre elles x, y, z, on fera disparaître ce qui caractérise le point que l'on a considéré en particulier. Il restera deux relations entre ξ, η, ζ qui seront les équations du lieu en y considérant ces lettres comme des coordonnées courantes.

On peut de même trouver la *surface réglée lieu des normales principales*. Il suffira, pour cela, de joindre aux équations (54) et (55) de la normale principale les deux équations de la courbe. En éliminant entre elles x, y, z, il restera une relation entre X, Y, Z qui sera l'équation de la surface.

§ II.

THÉORIE DE L'HÉLICE.

174. Si on trace une droite sur un plan flexible et inextensible et qu'on enroule celui-ci sur un cylindre de révolution, la transformée de la droite formera une ligne gauche qu'on appelle *hélice*.

Comme la ligne droite est identique à elle-même en tous ses points, ainsi que le cylindre de révolution, il est clair que l'hélice sera aussi superposable à elle-même dans toutes ses parties ([1]).

([1]) L'hélice, le cercle et la droite sont les seules lignes qui jouissent de cette propriété.

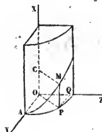
Elle permettrait de donner l'idée la plus nette de la forme d'une courbe gauche en un de ses points au moyen d'une hélice osculatrice, analogue au cercle osculateur et à la tangente.

Cette propriété explique aussi la grande importance de ces trois lignes pour la construction des machines. On a besoin, en effet, de pièces mobiles

Si on mène une génératrice quelconque du cylindre, elle rencontre la courbe en une infinité de points. La portion comprise entre deux intersections consécutives s'appelle le *pas* pour la génératrice et la *spire* pour l'hélice.

Un pas et un rayon donnés déterminent la forme d'une hélice, pourvu qu'on en connaisse encore le *sens*. On distingue, en effet, les hélices *à droite* et *à gauche* suivant que l'enroulement s'effectue en avançant et par-dessus, dans l'un ou l'autre de ces sens. Deux hélices ainsi décrites ne sont pas superposables. Il y a entre elles la différence qui distingue deux polyèdres symétriques de deux polyèdres égaux.

Fig. 17.



175. Nous pouvons, sans particulariser en rien, prendre le rayon pour unité, l'axe du cylindre pour axe des x que nous placerons verticalement, et le rayon d'un point A considéré comme origine de l'hélice pour axe des y.

La section droite AP se transformerait en une ligne droite, ainsi que l'hélice AM, si on déroulait de nouveau le cylindre, et alors les abscisses AP de la ligne AM seraient

---

dont les parties successives puissent venir en contact avec une même portion d'un moule identique. On les obtient par l'emploi de cylindres, de surfaces de révolution et d'héliçoïdes qui dérivent de la droite, du cercle et de l'hélice et qui forment les glissières, les pièces tournantes et les vis de toutes espèces.

proportionnelles à ses ordonnées MP ou x. On peut donc représenter l'arc de cercle AP par mx. Or y est évidemment le cosinus et z le sinus de cet arc, et comme ils sont pris dans un cercle dont le rayon est l'unité, on a simplement

$$y = \cos mx, \quad z = \sin mx.$$

On voit donc que la projection de l'hélice sur un plan parallèle à son axe est une *sinusoïde*.

On tire de là les formules différentielles

$$\frac{dy}{dx} = -m \sin mx, \qquad \frac{dz}{dx} = m \cos mx,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -m^2 \cos mx, \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = -m^2 \sin mx,$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} = m^3 \sin^2 mx + m^3 \cos^2 mx = m^3.$$

176. Si on substitue ces valeurs dans les équations de la tangente (53), il vient

$$m(X - x) = -\frac{Y - y}{\sin mx} = \frac{Z - z}{\cos mx}.$$

En appelant i l'inclinaison de la tangente sur le plan de section droite, $\sin i$ sera le cosinus de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x. Par suite,

$$\sin i = \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \sin^2 mx + \cos^2 mx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Cette inclinaison est par suite constante et fournit la valeur du paramètre m,

$$m = \cot i.$$

On pourra, d'après cela, construire la tangente, puis-

qu'elle doit être dans le plan vertical tangent au cylindre, avoir l'inclinaison i et être dirigée d'un certain côté connu d'après le sens de la courbe.

En formant l'équation du plan normal, il vient

$$(X - x) - m \sin mx (Y - y) + m \cos mx (Z - z) = 0.$$

On peut la simplifier en rendant à y et z leurs valeurs

$$(62) \qquad \frac{1}{m}(X - x) - Y \sin mx + Z \cos mx = 0.$$

Cette équation est satisfaite pour le point $X = x$, $Y = Z = 0$, ce qui montre que le plan normal coupe l'axe à la hauteur du point d'incidence M. Il contient par suite le rayon MC de ce point.

Si de plus on forme le cosinus de l'inclinaison du plan sur celui yz de la section droite, on reproduira l'expression précédente. Donc cette inclinaison est constante et complémentaire de celle de la tangente. Il est facile par suite de construire le plan normal en menant par le rayon un plan sous l'inclinaison $90° - i$ et du côté opposé au sens de la courbe.

Si on forme l'équation (55) du plan osculateur, il vient

$$m^3 (X - x) + m^2 (Y - y) \sin mx - m^2 \cos mx (Z - z) = 0,$$

qui se réduit encore à

$$(63) \qquad m(X - x) + Y \sin mx - Z \cos mx = 0.$$

On fera voir de la même manière qu'il contient le rayon et que son inclinaison est constante et égale à i, ce qui permet de le construire facilement.

La normale principale est représentée par les équations

(62) et (63). Or si on les ajoute, elles donnent

$$X = x,$$

et d'après cela l'une quelconque d'entre elles devient

$$Z = Y . \operatorname{tang} mx.$$

Ces deux formules montrent que la normale principale est horizontale et qu'elle rencontre l'axe, c'est par suite le rayon MC lui-même.

L'expression générale (61) du rayon de courbure donne

$$\rho = \frac{(1 + m^2 \sin^2 mx + m^2 \cos^2 mx)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m^6 + m^4 \sin^2 mx + m^4 \cos^2 mx}} = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2 \sqrt{1 + m^2}} = 1 + \frac{1}{m^2}.$$

Ainsi le rayon de courbure de l'hélice est constant.

Le centre de courbure s'obtiendra en portant sur le rayon du cylindre la longueur $\frac{1}{m^2}$ ou $\operatorname{tang}^2 i$ au delà de l'axe. Il s'ensuit que le lieu de ces centres sera une hélice de même sens et de même pas, mais de rayon $\frac{1}{m^2}$. Si l'hélice est en particulier de 45 degrés, le lieu des centres de courbure est une hélice égale avancée d'un demi-pas ou tournée d'une demi-circonférence.

La surface réglée lieu des normales principales sera de même un héliçoïde à plan directeur ayant pour directrice la courbe elle-même. C'est la surface de la vis à filet carré ou de l'escalier tournant.



CHAPITRE. VII.

SURFACES COURBES.

§ I.

PLAN TANGENT.

177. On rapporte une surface courbe à trois axes coordonnés, et on la représente au moyen d'une équation entre les trois variables. L'une d'elles, z par exemple, devient par là fonction des deux autres x, y, considérées comme variables indépendantes. La nature des calculs change par suite complétement de face lorsqu'on passe de l'étude des lignes à celle des surfaces.

Cherchons d'abord le lieu géométrique des tangentes à toutes les courbes qu'on peut tracer sur une surface en un de ses points. Pour cela prenons un point infiniment voisin sur l'une de ces courbes, ce point se trouvera aussi sur la surface, et, par suite, l'accroissement que reçoit l'ordonnée pour passer de l'un à l'autre sera sa différentielle totale

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Mais ce point appartient à l'une des tangentes dont les équations peuvent s'écrire

$$\frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z}.$$

Comme dx, dy, dz sont les mêmes, nous pouvons les éli-

miner entre ces relations, et il vient

$$Z - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(X - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(Y - y).$$

Cette équation est du premier degré et représente un plan. Donc toutes les tangentes sont comprises dans un même plan, qu'on appelle le *plan tangent*.

Nous aurons parfois besoin de connaître l'inclinaison φ du plan tangent sur celui des xy. Elle a pour valeur

$$(64) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

On peut donner à l'équation du plan tangent une forme très-symétrique en spécifiant celle de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

On en déduit, en effet, en différentiant successivement par rapport à x et y,

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)},$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Il vient en substituant

$$\left(\frac{df}{dx}\right)(X - x) + \left(\frac{df}{dy}\right)(Y - y) + \left(\frac{df}{dz}\right)(Z - z) = 0.$$

Exemple. — Cherchons le plan tangent aux surfaces du

second ordre

$$(65)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ + Bxy + B'xz + B''yz \\ + Cx + C'y + C''z + D = 0. \end{array}\right.$$

Il vient immédiatement

$$\begin{array}{l} (2Ax + By + B'z + C)(X - x) \\ + (2A'y + Bx + B''z + C')(Y - y) \\ + (2A''z + B'x + B''y + C'')(Z - z) = 0, \end{array}$$

ou, en ajoutant le double de l'équation de la surface,

$$\begin{array}{l} (2Ax + By + B'z + C)X \\ + (2A'y + Bx + B''z + C')Y \\ + (2A''z + B'x + B''y + C'')Z \\ + (Cx + C'y + C''z + 2D) = 0. \end{array}$$

178. *Normale*. — On appelle *normale* d'une surface la droite menée par un point dit d'*incidence* perpendiculairement sur son plan tangent. On voit qu'une surface a une normale unique et un plan tangent qui renferme une infinité de tangentes, tandis qu'une ligne a une tangente unique et un plan normal qui contient une infinité de normales.

Si on se borne aux coordonnées rectangulaires, les coefficients des variables devront être les inverses de ceux de l'équation du plan tangent. Comme, en outre, la normale doit passer au point d'incidence (x, y, z), elle aura pour équations

$$\frac{X - x}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)} = \frac{Y - y}{\left(\dfrac{df}{dy}\right)} = \frac{Z - z}{\left(\dfrac{df}{dz}\right)}.$$

La normale commune de deux surfaces a, comme celle

des lignes, la propriété de mesurer leur plus courte et leur plus longue distances mutuelles. Si on considère, en effet, l'expression

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

qui renferme quatre variables indépendantes x, y, x', y' dont z, z' sont respectivement fonctions, d'après les équations sous-entendues des deux surfaces ; on aura (92), en différentiant en premier lieu par rapport à x dont z seul dépend,

$$\Delta\left(\frac{d\Delta}{dx}\right) = (x - x') + (z - z')\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = -\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)},$$

$$\frac{x - x'}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{z - z'}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Les points (x, y, z) et (x', y', z') satisfont donc à l'une des équations de la normale au premier d'entre eux. En traitant de même les trois autres variables indépendantes, on montrerait que la droite en question est la normale commune des deux surfaces.

179. *Contour apparent.* — On appelle *contour apparent* d'une surface sur un plan, la projection sur ce plan de la série des points dont le plan tangent lui est perpendiculaire. C'est aussi l'enveloppe des traces de ces plans tangents.

Prenons ce plan pour celui des XY. Pour les points en question, la coordonnée Z devra disparaître de l'équation du plan tangent, car si elle y restait, l'équation lui attribuerait une valeur unique quand X et Y seraient déterminés. Au contraire, le plan étant vertical contient toute

la verticale du point X, Y, et, par suite, Z doit rester indéterminé. Mais le coefficient de Z dans l'équation du plan tangent est $\left(\frac{df}{dz}\right)$. On a donc aux points cherchés

$$\left(\frac{df}{dz}\right) = 0.$$

Si on joint à cette relation l'équation de la surface et qu'on élimine z entre les deux, on aura entre x et y celle du contour apparent.

Exemple. — Cherchons le contour apparent sur le plan horizontal des surfaces du second ordre représentées par l'équation (65). L'équation dérivée par rapport à z sera

$$2A''z + B'x + B''y + C'' = 0.$$

En tirant de là z pour le substituer dans (65) et opérant toutes les réductions, on trouve

$$(4AA'' - B'^2)x^2 + (4A'A'' - B''^2)y^2 + 2(2A''B - B'B'')xy$$
$$+ 2(2C - B'C'')x + 2(2C' - B''C'')y + (4A''D - C''^2) = 0,$$

équation d'une courbe du second ordre, dont la nature sera indiquée par le signe de l'expression

$$A''(AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - 4AA'A'' - BB'B'').$$

§ II.

FAMILLES DE SURFACES.

180. Les surfaces sont susceptibles d'être classées par *familles* d'après un mode de génération commun. Chacune d'elles peut être représentée par une équation collective, dans laquelle figure au moins une fonction arbitraire, à

cause du degré d'indétermination laissé dans le mode de génération. Quelques exemples vont dissiper ce que ces généralités peuvent avoir d'obscur.

Exemple I. — On appelle *cylindres* les surfaces engendrées par le mouvement d'une droite ou *génératrice* qui reste parallèle à une direction fixe et s'appuie constamment sur une courbe quelconque appelée *directrice*.

Si on prend les équations de la génératrice sous la forme

$$x = mz + a, \quad y = nz + b,$$

m et n devront être considérées comme des constantes absolues relatives à la direction fixe qui a été adoptée; a et b, au contraire, sont des paramètres variables dont les diverses valeurs caractérisent les différentes génératrices. Un seul de ces paramètres reste arbitraire, l'autre s'en déduisant constamment par la condition que la génératrice ait un point commun avec la directrice. Si donc on considère x, y, z comme les mêmes dans les deux équations de cette courbe et les deux précédentes, et qu'on les élimine entre ces quatre relations, on obtiendra celle

$$a = f(b),$$

qui relie les deux paramètres.

Si on remplaçait a par cette valeur dans les deux égalités ci-dessus, on aurait les équations d'une génératrice en particulier. Si, au contraire, on fait disparaître les deux paramètres entre ces trois formules, on aura une relation qui conviendra à tous les points de toutes les génératrices et qui sera par suite l'équation de la surface. Le résultat de cette élimination est évidemment

$$(66) \qquad x - mz = f(y - nz).$$

Telle est l'équation générale des cylindres.

EXEMPLE II. — On appelle *cônes* les surfaces engendrées par le mouvement d'une droite ou *génératrice* qui pivote autour d'un point fixe appelé *sommet* en s'appuyant sur une courbe *directrice* quelconque.

Si α, β, γ sont les coordonnées du sommet, on pourra prendre les équations de la génératrice sous la forme

$$x-\alpha=a(z-\gamma),\quad y-\beta=b(z-\gamma);$$

a et b étant les deux paramètres arbitraires. Ils sont liés par une condition qui doit exprimer que cette droite rencontre la courbe et qu'on obtiendra, en éliminant x, y, z entre leurs quatre équations,

$$a=f(b).$$

Si maintenant on fait disparaître de ces trois formules les paramètres a et b qui particularisent chaque génératrice, on obtiendra l'équation générale des cônes

$$(67)\qquad \frac{x-\alpha}{z-\gamma}=f\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right).$$

181. *Equations aux différentielles partielles.* — Chaque famille de surfaces est aussi susceptible d'une équation collective où ne figure plus aucune fonction arbitraire et où s'introduisent à la place les dérivées partielles de l'ordonnée.

Si, en effet, on différentie successivement par rapport à x et y l'équation finie de la famille, on obtiendra deux relations où se trouvera la dérivée de la fonction arbitraire, et on pourra l'éliminer entre elles, de manière à faire disparaître toutes traces de cette fonction. Si, dans des exemples plus compliqués que ceux que nous avons choisis, la fonction elle-même subsistait en même temps que sa dérivée, on aurait pour les faire disparaître toutes les deux trois relations, à savoir, l'équation finie et ses deux dérivées partielles.

EXEMPLE I. — Si nous reprenons l'équation finie des cylindres (66)

$$x - mz = f(y - nz),$$

nous en déduisons, en différentiant successivement par rapport à x et y,

$$1 - m\left(\frac{dz}{dx}\right) = f'(y - nz).\left[-n\left(\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

$$-m\left(\frac{dz}{dy}\right) = f'(y - nz).\left[1 - n\left(\frac{dz}{dy}\right)\right].$$

Si on multiplie membre à membre inversement, il vient

$$\left[1 - m\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]\left[1 - n\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] = mn\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

ou, en réduisant,

$$(68) \qquad m\left(\frac{dz}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dy}\right) = 1.$$

Telle est l'équation différentielle partielle des cylindres.

EXEMPLE II. — On aura de même pour les cônes (67)

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = f\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right);$$

$$\frac{(z-\gamma) - (x-\alpha)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{(z-\gamma)^2} = f'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left[-\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

$$-\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2}\left(\frac{dz}{dy}\right) = f'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left[\frac{(z-\gamma) - (y-\beta)\left(\frac{dz}{dy}\right)}{(z-\gamma)^2}\right];$$

multipliant

$$\left[(z-\gamma) - (x-\alpha)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]\left[(z-\gamma) - (y-\beta)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]$$

$$= (x-\alpha)(y-\beta)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

et enfin

$$(69)\qquad (x-\alpha)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y-\beta)\left(\frac{dz}{dy}\right)=z-\gamma.$$

182. *Interprétation géométrique.* — Les équations différentielles partielles des familles de surfaces ne sont que la traduction analytique d'une propriété collective pour chacune d'elles et relative au plan tangent. Il est facile de le comprendre, puisque les coefficients de l'équation de ce plan

$$Z-z=\left(\frac{dz}{dx}\right)(X-x)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(Y-y)$$

sont les dérivées partielles de l'ordonnée et que les équations en question établissent pour chaque famille une relation entre ces coefficients.

Exemple I. — Si on cherche la famille des surfaces telles, que tous leurs plans soient parallèles à une droite donnée

$$X=mZ,\quad Y=nZ,$$

les éléments de la géométrie analytique fournissent immédiatement la relation

$$1=m\left(\frac{dz}{dx}\right)+n\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

On retrouve ainsi l'équation des cylindres (68).

Exemple II. — Cherchons les surfaces telles, que tous leurs plans tangents passent par un point donné (α, β, γ). L'équation du plan devra être satisfaite par les coordonnées de ce point, ce qui donne

$$(\gamma-z)=(\alpha-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(\beta-y)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

équation des cônes (69).



LIVRE IV.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

MÉTHODES D'INTÉGRATION.

§ 1.

INTÉGRATION DIRECTE.

183. Toute question nouvelle qui se présente en mathématiques donne lieu au problème inverse, dans lequel on se propose de remonter du résultat aux quantités qui lui ont donné naissance. Nous avons résolu complétement le problème de la différentiation ou de la recherche de la dérivée d'une fonction quelconque. Nous nous proposerons donc maintenant, une expression étant donnée, de trouver celle qui la reproduit par sa différentiation.

La fonction inconnue dont on a la dérivée $f(x)$ s'appelle l'*intégrale* de cette fonction. On l'exprime par le signe

$$\int f(x)\,dx,$$

qu'on énonce *intégrale de* $f(x)\,dx$. Sa recherche constitue le problème de l'*intégration* et forme l'objet du *calcul intégral*.

184. La question n'est pas complétement déterminée, en ce sens que plusieurs fonctions peuvent avoir la même dérivée. Mais elles présentent un caractère commun qu'il est facile d'assigner. Considérons, en effet, deux pareilles expressions, la différence de leurs différentielles sera zéro. Mais c'est aussi la différentielle de leur différence; et lorsqu'une quantité a pour différentielle zéro, elle ne reçoit aucun accroissement et reste constante. Les deux fonctions ne peuvent donc différer que par une constante, dont la valeur reste d'ailleurs quelconque.

Il suffit, par suite, de trouver une seule intégrale pour que toutes les autres s'en déduisent. La plus simple est celle qui est débarrassée de tous les termes constants qui s'y ajoutent. On l'appelle l'*intégrale sans constante*. L'*intégrale générale* s'en déduit par l'addition d'une *constante arbitraire* que nous désignerons par C.

La recherche de l'intégrale sans constante est loin de se faire d'après des règles sûres et précises comme la différentiation. Elle ne consiste guère qu'en des tâtonnements que l'habitude surtout enseigne à diriger convenablement. Je vais chercher à mettre en relief les idées principales que l'on peut suivre pour arriver au but. Lorsque le résultat est atteint, il est toujours facile de le contrôler par la différentiation.

185. *Premier principe.* — Il est d'abord nécessaire d'avoir un point de départ pour notre recherche. Nous le prendrons dans le calcul différentiel, en renversant simplement la notation d'un certain nombre de formules de différentiation.

EXEMPLES.

$$(70)\qquad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},\qquad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C.$$

$$(71)\qquad de^x = e^x\,dx,\qquad \int e^x dx = e^x + C.$$

(72) $dLx = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{x} = Lx + C.$

(73) $d\sin x = \cos x.dx$, $\int \cos x.dx = \sin x + C.$

$d\cos x = -\sin x.dx$, $\int \sin x.dx = -\cos x + C.$

(74) $d\,\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + C.$

(75) $d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

(76) $d\,\mathrm{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \mathrm{arc}\sin x + C.$

(77) $d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{1 + x^2}$, $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x + C.$

On pourrait prolonger indéfiniment ce tableau, mais il est clair que l'on n'aurait par là aucune chance de tomber sur une expression proposée. Il n'y a donc pas là véritablement une méthode de recherche.

186. *Deuxième principe.* — Lorsqu'une expression ne rentre pas immédiatement dans les types intégrables dont je viens de présenter les plus importants, on peut chercher à y démêler une de ces formes en la faisant porter non sur x lui-même, mais sur une fonction de x.

Exemples.

(78) $\int \frac{dx}{x + m} = \int \frac{d(x + m)}{x + m} = L(x + m) + C$, d'après (72).

$\int \frac{xdx}{\sqrt{m + x^2}} = \int \frac{d(m + x^2)}{2\sqrt{m + x^2}} = \sqrt{m + x^2} + C$, d'après (70).

$\int \cot x.dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = L\sin x + C$, d'après (72).

$\int \mathrm{tang}\,x.dx = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -L\cos x + C$, d'après (72).

§ II.

INTÉGRATION PAR TRANSFORMATION.

187. *Premier principe.* — Lorsqu'on n'aperçoit pas dans une fonction donnée un type intégrable, l'idée la plus naturelle est de chercher à l'y ramener par des transformations analytiques. On peut, en premier lieu, recourir pour cela aux moyens de l'analyse ordinaire.

EXEMPLES.

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{m-x^2}} &= \int \frac{d\frac{x}{\sqrt{m}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{m}} + C, \qquad \text{d'après (76)}; \end{aligned} \right.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}$$

$$= \int \frac{d \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x}{2}} = L \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C, \qquad \text{d'après (72)}.$$

188. *Deuxième principe.* — Un moyen fort utile de simplification est fondé sur cette formule de calcul différentiel

$$d(mu) = m du,$$

qui donne, en renversant la notation,

$$\int m\,du = mu = m\int du;$$

ce qu'on exprime en disant qu'on peut faire sortir les facteurs constants du signe d'intégration. On pourra ainsi débarrasser une expression de tous ses coefficients, ce qui la simplifiera souvent d'une manière notable. Il est inutile de prendre des exemples.

Troisième principe. — On peut aussi profiter de cette remarque d'une manière inverse pour introduire des facteurs absents qui complètent un type intégrable. Il est nécessaire pour ne rien changer d'introduire en même temps les facteurs inverses, mais on le fait en dehors du signe d'intégration et l'opération devient par là possible.

Exemples.

(80) $$\int e^{mx}dx = \frac{1}{m}\int e^{mx}d(mx) = \frac{e^{mx}}{m} + C,$$ d'après (71).

(81) $$\int \cos mx.dx = \frac{1}{m}\int \cos mx.d(mx) = \frac{\sin mx}{m} + C,$$ d'après (73).

(82) $$\int \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{1}{m}\int \frac{d\left(\frac{x}{m}\right)}{1+\left(\frac{x}{m}\right)^2} = \frac{1}{m}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{m} + C,$$ d'après (77).

(83) $$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}\int (m+1)x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Cette dernière formule, fort importante, a lieu pour toutes les valeurs de m, entières ou fractionnaires, positives ou

négatives, excepté toutefois pour $m = -1$. L'intégrale est alors fournie par la formule (72).

189. *Quatrième principe.* — Lorsque ces moyens de transformation ne suffisent pas, on a recours à un autre plus puissant, en changeant nettement de variables. On pose pour cela

$$x = \varphi(y),$$

en déterminant φ d'après des vues particulières à chaque cas, pour lesquelles il est impossible d'assigner des règles générales. On en tire

$$dx = \varphi'(y)\,dy,$$
$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)] \cdot \varphi'(y) \cdot dy.$$

Si la fonction φ a été bien choisie, il peut arriver que cette expression soit plus simple que la proposée, et qu'on sache l'intégrer sous la forme $F(y)$. On résoudra alors la première équation par rapport à y

$$y = \psi(x),$$

et l'intégrale cherchée sera

$$\int f(x)\,dx = F[\psi(x)] + C.$$

190. J'indiquerai comme application une méthode qui permet d'intégrer les expressions où x figure d'une manière rationnelle, sauf un seul radical de la forme

$$\sqrt{m + nx + x^2},$$

qui peut y entrer du reste un nombre quelconque de fois. Il nous suffira de rendre la fonction complétement rationnelle, car nous rencontrerons bientôt un procédé général applicable à cette sorte de fonctions (195).

Nous poserons pour cela

(84) $$\sqrt{m+nx+x^2}=y-x.$$

Si on élève au carré, x^2 disparaît et il reste

$$m+nx=y^2-2xy,$$
$$ndx=2ydy-2xdy-2ydx;$$

on en tire

$$x=\frac{y^2-m}{2y+n},$$

(85) $$dx=\frac{y-x}{y+\frac{n}{2}}dy;$$

le radical et dx sont ainsi exprimés rationnellement en y et x, et comme x l'est lui-même en y, le résultat est atteint. Après l'intégration il n'y aura plus qu'à remplacer y par sa valeur

$$y=x+\sqrt{m+nx+x^2}.$$

Exemple. — Considérons l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{m+nx+x^2}};$$

d'après les formules (84) et (85) elle prend la forme (78)

$$\int\frac{dx}{y-x}=\int\frac{dy}{y+\frac{n}{2}}=L\left(y+\frac{n}{2}\right)+C,$$

ou, en remplaçant y par sa valeur,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{m+nx+x^2}}=L\left(x+\frac{n}{2}+\sqrt{m+nx+x^2}\right)+C.$$

191. Cette transformation ne réussirait pas si le carré

de x entrait négativement sous le radical

$$\sqrt{m+nx-x^2}.$$

On lui substitue alors la suivante

$$\sqrt{m+nx-x^2}=\sqrt{m}+xy;$$

élevant au carré, supprimant le terme m et le facteur x,

$$n-x=2y\sqrt{m}+xy^2$$

$$-dx=2dy\sqrt{m}+2xydy+y^2dx;$$

on en tire

$$x=\frac{n-2y\sqrt{m}}{1+y^2},$$

$$dx=-\frac{2(\sqrt{m}+xy)}{1+y^2}dy.$$

Le radical et dx sont encore exprimés rationnellement en y et x qui l'est lui-même en y. Après l'intégration, on substituera à y

$$y=\frac{\sqrt{m+nx-x^2}-\sqrt{m}}{x}.$$

Exemple. — Soit l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{m+nx-x^2}},$$

elle devient, d'après les formules précédentes,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{m}+xy}=-2\int\frac{dy}{1+y^2}=-2\operatorname{arc\,tang}y+C,$$

c'est-à-dire

$$(86)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{m+nx-x^2}}=-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{m+nx-x^2}-\sqrt{m}}{x}\right)+C.$$

§ III.

INTÉGRATION PAR DÉCOMPOSITION.

192. *Premier principe.* — La méthode d'*intégration par décomposition* est basée sur cette formule de calcul différentiel

$$d(u+v-w) = du + dv - dw,$$

$$\int (du + dv - dw) = u + v - w = \int du + \int dv - \int dw.$$

On peut ainsi, pour intégrer une somme algébrique, prendre la somme algébrique des intégrales de chaque terme.

Exemple. — On aura d'après la formule (83)

$$\int \left(3x^5 + \frac{1}{2x^3} - 7\sqrt[3]{x+1} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx$$

$$= 3\int x^5 dx + \frac{1}{2}\int x^{-3} dx - 7\int (x+1)^{\frac{1}{3}} d(x+1) + 3\int x^{-\frac{2}{5}} dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - 7\,\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C$$

$$= \frac{x^6}{2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{21\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} + 5\sqrt[5]{x^3} + C.$$

193. *Deuxième principe.* — Lorsqu'on s'aperçoit que quelques termes manquent à l'expression pour qu'elle rentre dans un type intégrable, on les ajoute, en ayant soin de les retrancher en même temps pour ne rien troubler. Puis on intègre par décomposition, en séparant la partie retranchée dans une intégrale spéciale, à la recherche de laquelle l'autre se trouve ainsi ramenée et qui peut être plus facile à trouver

Exemple I. — On a d'après (77)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= x - \text{arc tang } x + C.$$

Exemple II. — On a aussi d'après (70) et (86)

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{m+nx-x^2}} = -\int \frac{-2x\,dx}{2\sqrt{m+nx-x^2}} = -\int \frac{n-2x-n}{2\sqrt{m+nx-x^2}}dx$$
$$= -\int \frac{(n-2x)\,dx}{2\sqrt{m+nx-x^2}} + \frac{n}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{m+nx-x^2}}$$
$$= -\sqrt{m+nx-x^2} - n\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{m+nx-x^2}-\sqrt{m}}{x}\right) + C.$$

194. *Troisième principe.* — On peut combiner les deux méthodes de la transformation et de la décomposition, en changeant la fonction proposée en une somme de parties séparément intégrables.

Exemple I. — On a d'après (74) et (75)

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$= \text{tang}\, x - \text{cotang}\, x + C.$$

Exemple II. — On a d'après (81)

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \sin mx \sin nx\,.\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,.\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,.\,dx \\ &= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C. \end{aligned}\right.$$

Il est nécessaire, pour que ce résultat ne prenne pas la forme infinie, que les nombres m et n soient différents.

Exemple III. — Dans le cas d'égalité on a directement (81)

$$\int \sin^2 mx.dx = \int \frac{1-\cos 2mx}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m} + C.$$

195. On peut rattacher à ce principe une méthode générale pour l'intégration des fonctions rationnelles. Comme un polynôme entier et rationnel peut toujours s'intégrer par décomposition d'après la formule (83), et que l'intégrale d'une somme de fractions reviendra à la somme de leurs intégrales, il suffit de considérer une fraction rationnelle $f(x)$. Or nous possédons (livre II, chapitre IV) un procédé général pour la réduire à la forme

$$f(x) = \sum \frac{M}{(x+m)^\mu} + \sum \frac{N}{x+n},$$

en mettant en évidence les termes du premier degré. On tire de là en intégrant par décomposition (83 et 78)

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \sum \frac{M}{(x+m)^\mu}\,dx + \int \sum \frac{N}{x+n}\,dx \\ &= \sum \int \frac{M}{(x+m)^\mu}\,dx + \sum \int \frac{N}{x+n}\,dx \\ &= \sum M \int (x+m)^{-\mu}\,d(x+m) + \sum N \int \frac{d(x+n)}{x+n} \\ &= \sum M \frac{(x+m)^{1-\mu}}{1-\mu} + \sum N\, l(x+n) + C.\end{aligned}$$

Exemple I. — Nous avons trouvé (111)

$$\frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\left[\frac{1}{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} - \frac{1}{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\right],$$

on en tirera

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} L \left[\frac{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} \right] + C.$$

Exemple II. — Nous avons trouvé aussi (116)

$$\frac{1}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right];$$

nous en tirons

$$\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + L(x+1) - L(x-1)\right] + C$$

$$= \frac{x}{2(1-x^2)} + L\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

196. *Quatrième principe.* — On peut employer le double principe de la transformation et de la décomposition d'une manière inverse. Au lieu de ramener une expression compliquée à une somme d'autres séparément intégrables, on change une fonction intégrable en une somme de deux autres quelconques. Il s'agit ensuite de discerner dans l'expression intégrée la partie qui exprime chacune des deux intégrales inconnues.

Un premier moyen consiste à introduire des quantités imaginaires, ce qui donne la faculté d'égaler séparément les parties réelles et imaginaires. On obtiendra ainsi deux relations qui fourniront les intégrales inconnues.

Exemple. — Supposons connue l'intégrale suivante dont nous donnerons plus tard l'expression (92, p. 242)

$$\varphi(n) = \int x^m e^{nx}\, dx,$$

on aura, d'après la formule d'Euler (13, p. 86), en chan-

geant n en $p+q\sqrt{-1}$,

$$\varphi(p+q\sqrt{-1})=\int x^m e^{(p+q\sqrt{-1})x}\,dx$$

$$=\int x^m e^{px} e^{qx\sqrt{-1}}\,dx=\int x^m e^{px}(\cos qx+\sqrt{-1}\sin qx)\,dx$$

$$=\int x^m e^{px}\cos qx.dx+\sqrt{-1}\int x^m e^{px}\sin qx.dx.$$

Par suite, en séparant dans $\varphi(p+q\sqrt{-1})$ les parties réelles et imaginaires, on obtiendra les deux intégrales

$$\int x^m e^{px}\cos qx.dx,\qquad \int x^m e^{px}\sin qx.dx,$$

plus générales que celle qui a servi de point de départ.

197. Un second moyen consiste à séparer l'expression intégrable en deux fonctions semblables qui ne diffèrent que par la valeur d'un paramètre numérique. On obtient par là une relation entre deux valeurs consécutives de la fonction envisagée par rapport à son paramètre et on en déduit cette fonction de proche en proche. Un exemple est indispensable pour faire comprendre cet énoncé.

Exemple. — On a (83), sauf la constante,

$$\int \frac{\operatorname{tang}^{n-2}x}{\cos^2 x}\,dx=\int \operatorname{tang}^{n-2}x.d\operatorname{tang}x=\frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1};$$

or on a aussi identiquement

$$\frac{\operatorname{tang}^{n-2}x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^{n-2}x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\cos^n x}=\frac{\sin^n x}{\cos^n x}+\frac{\sin^{n-2}x}{\cos^{n-2}x}$$

$$=\operatorname{tang}^n x+\operatorname{tang}^{n-2}x.$$

Multiplions par dx et intégrons par décomposition, il vient

$$\frac{\tang^{n-1} x}{n-1} = \int \tang^n x.dx + \int \tang^{n-2} x.dx.$$

Si donc nous posons

$$\int \tang^n x.dx = \varphi(n),$$

on pourra écrire

$$\varphi(n) = \frac{\tang^{n-1} x}{n-1} - \varphi(n-2).$$

Telle est la relation en question.

Pour en déduire la fonction elle-même, changeons successivement n en $n-2$, $n-4$, ..., il viendra

$$\varphi(n-2) = \frac{\tang^{n-3} x}{n-3} - \varphi(n-4),$$

$$\varphi(n-4) = \frac{\tang^{n-5} x}{n-5} - \varphi(n-6),$$

....

et en substituant de proche en proche

$$\varphi(n) = \frac{\tang^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tang^{n-3} x}{n-3} + \frac{\tang^{n-5} x}{n-5} - \ldots,$$

mais il faut reconnaître la manière dont la série se termine.

Si n est pair, on sera ramené à

$$\varphi(0) = \int dx = x + C,$$

et si n est impair, à (186)

$$\varphi(1) = \int \tang x.dx = -L\cos x + C';$$

on aura donc

$$\int \operatorname{tang}^{2m} x . dx = \frac{\operatorname{tang}^{2m-1} x}{2m-1} - \frac{\operatorname{tang}^{2m-3} x}{2m-3} + \frac{\operatorname{tang}^{2m-5} x}{2m-5} - \ldots$$

$$\pm \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} \mp \frac{\operatorname{tang} x}{1} \pm x + C'',$$

$$\int \operatorname{tang}^{2m+1} x . dx = \frac{\operatorname{tang}^{2m} x}{2m} - \frac{\operatorname{tang}^{2m-2} x}{2m-2} + \frac{\operatorname{tang}^{2m-4} x}{2m-4} - \ldots$$

$$\pm \frac{\operatorname{tang}^4 x}{4} \mp \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \mp L \cos x + C'',$$

avec les signes supérieurs ou inférieurs suivant que m est pair ou impair.

198. *Cinquième principe.* — Comme nous savons intégrer un polynôme entier et rationnel quelconque (195) et que toute fonction peut être mise sous cette forme par la réduction en série, on pourra employer cette voie pour intégrer une fonction quelconque ([1]). Cette méthode est complétement générale et l'est seule; malheureusement elle ne résout le problème qu'imparfaitement, car elle fait connaître l'intégrale par le moyen d'une série qu'il faudrait être ensuite en état de sommer pour avoir son expression finie, ce qui n'aura lieu que dans des cas très-rares.

Exemple I. — Si, par exemple, on cherche l'intégrale

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

on réduira la fonction en série sous la forme (23, p. 99)

$$\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} = x^m + \frac{1}{2} x^{m+2} + \frac{1.3}{2.4} x^{m+4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{m+6} + \ldots,$$

([1]) Nous réservons, bien entendu, les conditions de convergence.

d'où, en intégrant,

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^{m+5}}{m+5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{m+7}}{m+7} + \ldots$$

Exemple II. — De même si $f(x)$ désigne une fonction quelconque développable par la formule de Maclaurin, on aura

$$x^m f(x) = f(0).x^m + \frac{f'(0)}{1}\,x^{m+1} + \frac{f''(0)}{1.2}\,x^{m+2} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\int x^m f(x)\,dx = C + f(0)\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{f'(0)}{1}\,\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{f''(0)}{1.2}\,\frac{x^{m+3}}{m+3} + \ldots$$

§ IV.

INTÉGRATION PAR PARTIES.

199. La méthode d'*intégration par parties*, due à Jean Bernoulli, est fondée sur cette formule de calcul différentiel

$$d(uv) = udv + vdu,$$

$$uv = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu,$$

d'où on tire l'équation fondamentale

$$(88) \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

Si donc dans une fonction proposée on peut discerner un facteur immédiatement intégrable dv, on l'intégrera sans modifier le reste u de l'expression, ce qui donnera le terme uv; puis on retranchera une intégrale formée en conservant

la partie intégrée v et différentiant l'autre facteur u, ce qui peut toujours se faire. La recherche de la première intégrale sera par là ramenée à la seconde qui sera souvent plus facile.

200. *Premier principe.* — Une première voie qu'on peut toujours tenter, consiste à considérer dx comme la partie intégrable. On a alors la formule générale

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx.$$

EXEMPLES.

(89) $$\int Lx.dx = x\,Lx - \int x.\frac{dx}{x} = x\,Lx - x + C.$$

$$\int \arcsin x.dx = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \operatorname{arc\,tang} x.dx = x \operatorname{arc\,tang} x - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C.$$

201. *Deuxième principe.* — Le plus souvent on prend une fonction pour la partie intégrable.

EXEMPLES.

$$\int x \cos x.dx = \int x.d \sin x = x \sin x - \int \sin x.dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

(90) $$\int x \sin x.dx = -\int x.d \cos x = -x \cos x + \int \cos x.dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

202. *Troisième principe.* — Lorsque certains facteurs manquent pour composer une partie intégrable, on peut

les introduire en ayant soin de mettre dans l'autre partie les facteurs inverses pour ne rien changer.

EXEMPLE.

$$(91)\quad \int \sin^2 x.dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}.\sin x \cos x.dx = \frac{1}{2}\int \tang x.d\sin^2 x$$

$$= \frac{1}{2}\tang x \sin^2 x - \frac{1}{2}\int .\sin^2 x.\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\tang x \sin^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\tang x \sin^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}\tang x \sin^2 x - \frac{1}{2}\tang x + \frac{1}{2}x + C$$

$$= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

203. *Quatrième principe.* — Il arrive souvent que l'intégrale à laquelle on est ramené n'est pas connue immédiatement, mais qu'elle est pourtant plus simple que la proposée; de telle sorte qu'il devient évident qu'en persévérant dans cette voie et appliquant plusieurs fois de suite la méthode, on arrivera à une expression directement intégrable.

EXEMPLE I. — Considérons d'abord l'intégrale

$$\int L^n x.dx = x L^n x - n\int x.L^{n-1}x.\frac{dx}{x}$$

$$= x L^n x - n\int L^{n-1}x.dx.$$

Nous sommes ramenés à une expression toute semblable, mais dans laquelle l'exposant est abaissé d'une unité. Si donc on désigne l'intégrale cherchée par

$$\int L^n x.dx = \varphi(n);$$

cette équation prendra la forme

$$\varphi(n) = xL^n x - n\varphi(n-1).$$

En changeant successivement n en $n-1$, $n-2$,..., il viendra

$$\varphi(n-1) = xL^{n-1}x - (n-1)\varphi(n-2),$$
$$\varphi(n-2) = \quad L^{n-2}x - (n-2)\varphi(n-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(2) = xL^2 x - 2\varphi(1).$$

Or on a trouvé directement (89)

$$\varphi(1) = \int Lx.dx = xLx - x + C.$$

On aura donc, en substituant de proche en proche,

$$\int L^n x.dx = C' + x \left\{ \begin{array}{l} L^n x - nL^{n-1}x + n(n-1)L^{n-2}x - \ldots \\ \ldots \pm n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1 \end{array} \right\},$$

avec le signe supérieur ou inférieur suivant que n est pair ou impair.

Exemple II. — Considérons maintenant l'intégrale

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{1}{n}\int x^m de^{nx} = \frac{x^m e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\int e^{nx}.x^{m-1}dx.$$

Si nous posons

$$\int x^m e^{nx} dx = \varphi(m),$$

cette formule se transformera ainsi

$$\varphi(m) = \frac{x^m e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\varphi(m-1),$$

et donnera successivement

$$\varphi(m-1) = \frac{x^{m-1}e^{nx}}{n} - \frac{(m-1)}{n}\varphi(m-2),$$

$$\varphi(m-2) = \frac{x^{m-2}e^{nx}}{n} - \frac{(m-2)}{n}\varphi(m-3),$$

....

Comme on aura pour finir (80)

$$\varphi(0) = \int e^{nx}dx = \frac{e^{nx}}{n} + C,$$

il viendra, en substituant de proche en proche,

$$(92)\quad \int x^m e^{nx}dx = C + \frac{e^{nx}}{n}\left\{\begin{array}{l} x^m - \frac{m}{n}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2}x^{m-2} \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{n^3}x^{m-3} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.3.2.1}{n^m} \end{array}\right\},$$

avec le signe supérieur ou inférieur suivant que m est pair ou impair.

204. *Cinquième principe.* — Une méthode fort élégante consiste à diriger le calcul de manière à reproduire la même intégrale, mais avec un autre coefficient que l'unité positive. On forme ainsi une équation du premier degré qui la détermine.

EXEMPLE I. — Considérons comme exemple très-simple

$$\int x^m dx = x.x^m - \int x.mx^{m-1}dx$$

$$= x^{m+1} - m\int x^m dx.$$

On tire de là

$$(m+1)\int x^m dx = x^{m+1} + \mathrm{C},$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C}'.$$

Exemple II. — Désignons par m et n deux nombres quelconques entiers et positifs. On a

$$\int \sin^m x \cos^n x \,.\, dx = \frac{1}{m+1}\int \cos^{n-1} x \,.\,(m+1)\sin^m x \cos x \,.\, dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+1} x \,.\cos^{n-2} x \sin x \,.\, dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)\, dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \,.\, dx$$

$$- \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x \,.\, dx.$$

La dernière intégrale est précisément la proposée; il vient donc, en la faisant passer dans le premier membre,

$$\frac{m+n}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x \,.\, dx =$$

$$\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \,.\, dx.$$

Si donc on représente par $\varphi(m, n)$ l'intégrale cherchée, on aura

$$\varphi(m, n) = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\varphi(m, n-2).$$

On trouverait absolument de même en opérant sur le cosi-

nus comme nous l'avons fait pour le sinus

$$\varphi(m,n) = -\frac{\cos^{n+1}x\sin^{m-1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\varphi(m-2,n).$$

Ces formules permettent d'abaisser de deux unités chacun des deux exposants. C'est ce qu'on fera successivement jusqu'à ce qu'ils soient réduits suivant leurs parités à zéro ou à l'unité. On sera ainsi ramené à l'une des intégrales

$$\int dx,\quad \int \sin x.dx,\quad \int \cos x.dx,\quad \int \sin x\cos x.dx,$$

qui sont respectivement, sauf la constante,

$$x,\quad -\cos x,\quad \sin x,\quad -\frac{\cos 2x}{4}.$$

205. Exemple III. — Considérons encore l'expression

$$\int x^p(m+nx^q)^r dx.$$

Les coefficients m et n sont quelconques; quant aux exposants, r est supposé quelconque, q un nombre entier et positif, et p un multiple de q diminué de l'unité. On aura, en employant l'intégration par parties,

$$\int x^p(m+nx^q)^r dx$$
$$= \frac{1}{(r+1)nq}\int x^{p-q+1}.(r+1)(m+nx^q)^r\, nqx^{q-1}dx$$
$$= \frac{x^{p-q+1}(m+nx^q)^{r+1}}{(r+1)nq} - \frac{p-q+1}{(r+1)nq}\int x^{p-q}(m+nx^q)^{r+1}dx.$$

Or on a, en détachant un des facteurs $m+nx^q$,

$$x^{p-q}(m+nx^q)^{r+1} = mx^{p-q}(m+nx^q)^r + nx^p(m+nx^q)^r;$$

ce qui décompose l'intégrale en deux autres

$$\int x^p (m + nx^q)^r dx = \frac{x^{p-q+1}(m + nx^q)^{r+1}}{(r+1)nq}$$
$$- \frac{m(p-q+1)}{(r+1)nq} \int x^{p-q} (m + nx^q)^r dx$$
$$- \frac{n(p-q+1)}{(r+1)nq} \int x^p (m + nx^q)^r dx.$$

Mais la dernière est la même que la proposée que je représenterai par $\varphi(p)$. L'autre est une intégrale toute semblable où l'exposant p de x est changé en $p - q$, c'est-à-dire $\varphi(p-q)$. De là l'équation

$$\frac{n(p+qr+1)}{(r+1)nq} \cdot \varphi(p)$$
$$= \frac{x^{p-q+1}(m + nx^q)^{r+1}}{(r+1)nq} - \frac{m(p-q+1)}{(r+1)nq} \cdot \varphi(p-q),$$

et par suite

$$\varphi(p) = \frac{x^{p-q+1}(m + nx^q)^{r+1}}{n(p+qr+1)} - \frac{m(p-q+1)}{n(p+qr+1)} \cdot \varphi(p-q).$$

La recherche de $\varphi(p)$ se trouve par là ramenée à celle de $\varphi(p-q)$. En abaissant ainsi successivement l'exposant de x de q unités chaque fois, on finira par le réduire à $q - 1$, puisque p est par hypothèse un multiple de q diminué de l'unité. On aura alors directement

$$\int x^{q-1} (m + nx^q)^r dx = \frac{1}{(r+1)nq} \int (r+1)(m + nx^q)^r nqx^{q-1} dx$$
$$= \frac{(m + nx^q)^{r+1}}{(r+1)nq} + C.$$

206. *Sixième principe.* — On peut enfin chercher à faire reparaître la même intégrale, non plus immédiate-

ment, mais après un certain nombre d'autres intégrales intermédiaires. En les considérant, ainsi que la proposée, comme des inconnues, on aura entre elles un nombre égal d'équations. Celles-ci seront du premier degré et on en pourra toujours faire l'élimination. On trouvera de cette manière l'intégrale proposée, et accessoirement plusieurs autres.

Exemple I. — Traitons ainsi l'expression

$$\int e^{mx}\sin nx . dx = \frac{1}{m}\int \sin nx . de^{mx} = \frac{e^{mx}\sin nx}{m} - \frac{n}{m}\int e^{mx}\cos nx . dx.$$

Cette nouvelle intégrale étant analogue à la proposée, j'opérerai de même sur elle

$$\int e^{mx}\cos nx . dx = \frac{1}{m}\int \cos nx . de^{mx} = \frac{e^{mx}\cos nx}{m} + \frac{n}{m}\int e^{mx}\sin nx . dx.$$

Nous sommes maintenant ramenés au point de départ. Si donc nous faisons

$$\int e^{mx}\sin nx . dx = u, \quad \int e^{mx}\cos nx . dx = v,$$

nous aurons les deux relations

$$u = \frac{e^{mx}\sin nx}{m} - \frac{n}{m}v,$$

$$v = \frac{e^{mx}\cos nx}{m} + \frac{n}{m}u.$$

L'élimination donne

$$u = \frac{m\sin nx - n\cos nx}{m^2 + n^2}e^{mx},$$

$$v = \frac{m\cos nx + n\sin nx}{m^2 + n^2}e^{mx}.$$

On aura donc les deux intégrales

$$(93)\quad \begin{cases} \int e^{mx}\sin nx\,.\,dx = \dfrac{m\sin nx - n\cos nx}{m^2+n^2}\,e^{mx} + C, \\ \int e^{mx}\cos nx\,.\,dx = \dfrac{m\cos nx + n\sin nx}{m^2+n^2}\,e^{mx} + C'. \end{cases}$$

Exemple II. — Considérons encore l'expression

$$\int e^x\cos^2 x\,.\,dx = e^x\cos^2 x + 2\int e^x\cos x\sin x\,.\,dx;$$

nous avons de même

$$\int e^x\cos x\sin x\,.\,dx = e^x\cos x\sin x - \int e^x(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx.$$

Si on intègre par décomposition, on reproduit la proposée, mais en même temps une nouvelle intégrale. Or celle-ci se ramène à la seconde de cette manière

$$\int e^x\sin^2 x\,.\,dx = e^x\sin^2 x - 2\int e^x\sin x\cos x\,.\,dx.$$

Si donc nous faisons

$$\int e^x\cos^2 x\,.\,dx = u,\quad \int e^x\sin^2 x\,.\,dx = v,\quad \int e^x\sin x\cos x\,.\,dx = w,$$

nous aurons les relations

$$u = e^x\cos^2 x + 2w,$$
$$v = e^x\sin^2 x - 2w,$$
$$w = e^x\sin x\cos x - u + v.$$

On en tire

$$u + v = e^x,$$
$$u - v = e^x\cos 2x + 4w = e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x - 4(u - v),$$
$$u - v = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x),$$

ayant la somme et la différence,

$$u = \frac{e^x}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x),$$

$$v = \frac{e^x}{10}(5 - \cos 2x - 2\sin 2x),$$

$$w = \frac{e^x}{10}(5\sin 2x - 2\cos 2x - 4\sin 2x),$$

et par suite

$$\int e^x \cos^2 x \,.\, dx = \frac{e^x}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x) + C,$$

$$\int e^x \sin^2 x \,.\, dx = \frac{e^x}{10}(5 - \cos 2x - 2\sin 2x) + C',$$

$$\int e^x \sin x \cos x \,.\, dx = \frac{e^x}{10}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C''.$$

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

§ I.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

207. Désignons par $F(x)$ l'intégrale sans constante de $f(x)$, l'intégrale générale sera

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

les deux caractéristiques F et f étant reliées par l'égalité

$$F'(x) = f(x).$$

Envisageons deux valeurs particulières de la variable, x et X. Celles de l'intégrale qui leur correspondent seront $F(x) + C$ et $F(X) + C$, et l'accroissement qu'elle subit pour passer de l'une à l'autre

$$[F(X) + C] - [F(x) + C] = F(X) - F(x).$$

On voit qu'il est indépendant de la constante et par suite le même pour toutes les intégrales d'une même fonction. Il suffira donc de l'évaluer avec une seule d'entre elles, par exemple l'intégrale sans constante.

Or cet accroissement fini de l'intégrale est la somme des accroissements élémentaires qu'elle a reçus dans l'intervalle quand la variable a passé de x à X par des degrés infi-

piment petits dx. Un accroissement élémentaire peut être remplacé par la différentielle, et celle-ci s'exprimera par le produit $F'(x)\,dx$ de la dérivée par dx (1, p. 14), mais en ayant soin d'y donner à la variable ses valeurs successives x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$,.. , X. On aura donc

$$F'(x)\,dx + F'(x+dx)\,dx + F'(x+2dx)\,dx$$
$$+ F'(x+3\,dx)\,dx \ldots + F'(X)\,dx,$$

ou d'après la relation précédente

$$f(x)\,dx + f(x+dx)\,dx + f(x+2\,dx)\,dx$$
$$+ f(x+3\,dx)\,dx \ldots + f(X)\,dx.$$

De là ce théorème fondamental : Quand on rencontre une série formée des valeurs successives d'une fonction qui correspondent à des valeurs de la variable en progression arithmétique de raison dx, tous les termes étant multipliés par dx ; la somme de la série est égale à la différence des valeurs de l'intégrale qui correspondent aux deux limites extrêmes de la variable.

208. Une pareille expression s'appelle *intégrale définie*. Les valeurs extrêmes de la variable en sont dites les *limites*. On la désigne de la manière suivante :

$$\int_x^X f(x)\,dx,$$

et on l'énonce *somme de x à* X *de* $f(x)\,dx$, en commençant par la *limite inférieure* et finissant par la *limite supérieure.*

La lettre qui figure sous le signe d'une intégrale définie et qu'on appelle *symbole d'intégration,* est absolument indifférente, et on peut lui substituer tout autre caractère.

$$\int_x^X f(x)\,dx = \int_x^X f(\alpha)\,d\alpha,$$

puisque, après avoir effectué l'intégration à l'aide de cette

lettre, on doit la remplacer par deux valeurs déterminées qui en font disparaître toute trace. Cette remarque bien simple est parfois fort utile.

On peut renverser le sens des limites à la condition de changer en même temps le signe de l'expression. On a en effet

$$\int_x^X f(\alpha)\,d\alpha = F(X) - F(x),$$

$$\int_X^x f(\alpha)\,d\alpha = F(x) - F(X),$$

et par suite

$$\int_x^X f(\alpha)\,d\alpha = -\int_X^x f(\alpha)\,d\alpha.$$

Lorsqu'on change de variables sous le *signe somme*, il faut en même temps changer les limites. En effet, si on a posé (189)

$$x = \varphi(y) \quad \text{d'où} \quad y = \psi(x),$$

aux valeurs m et n de x correspondent pour y $\psi(m)$ et $\psi(n)$, de sorte qu'on aura

$$\int_m^n f(x)\,dx = \int_{\psi(m)}^{\psi(n)} f[\varphi(y)]\varphi'(y)\,dy.$$

209. On a donc, en fait d'intégrales, trois expressions bien distinctes à considérer :

L'intégrale générale $\int f(x)\,dx = F(x) + C,$

L'intégrale définie $\int_m^x f(x)\,dx = F(x) - F(m),$

L'intégrale numérique $\int_m^n f(x)\,dx = F(n) - F(m).$

La première est une fonction de x incomplétement déterminée. Il ne suffit pas, en effet, d'assigner la valeur de x

pour qu'on puisse calculer celle de la fonction. Il faudrait en outre particulariser celle de C, mais alors on n'aurait plus l'intégrale générale. La seconde est une véritable fonction de x déterminée en même temps que la variable. La dernière n'est plus une fonction, mais une simple valeur numérique.

Exemple.

Intégrale générale $\int e^x\,dx = e^x + C,$

Intégrale définie $\int_0^x e^x\,dx = e^x - e^0 = e^x - 1,$

Intégrale numérique $\int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0 = 1{,}71828\ldots$

§ II.

CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

210. La seule méthode générale pour l'évaluation des intégrales définies dérive de leur définition. Elle consiste à former l'intégrale sans constante, à y substituer les deux limites et à retrancher les deux résultats. Ce procédé est évidemment peu satisfaisant, puisqu'il oblige à déterminer une forme analytique, c'est-à-dire une infinité de valeurs, lorsqu'on n'a besoin que de deux seulement d'entre elles.

Exemples I. — On a, quel que soit l'entier m (81),

$$(94)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,.\,dx = \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\sin m\pi - \sin(-m\pi)}{m} = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\,.\,dx = \left[-\frac{1}{m}\cos mx\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{-\cos m\pi + \cos(-m\pi)}{m} = 0. \end{cases}$$

En effet, les deux sinus sont individuellement nuls, et les deux cosinus sont égaux entre eux.

Exemples II. — Les produits, tels que $\sin mx \sin nx$, $\sin mx \cos nx$, $\cos mx \cos nx$, dans lesquels m et n sont supposés différents, peuvent toujours être décomposés en sommes de sinus ou de cosinus (87) auxquels s'appliqueront séparément les deux formules (94). On aura par suite

(95)
$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx.dx = 0, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx.dx = 0, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx.dx = 0. \end{aligned}\right.$$

211. On peut employer utilement le changement de variables pour ramener une intégrale définie à une plus simple.

Exemple I. — Désignons par n un nombre entier quelconque, et considérons l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx.dx.$$

Posons

$$y = nx, \quad dx = \frac{dy}{n},$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pi, \\ y &= n\pi, \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x &= -\pi, \\ y &= -n\pi. \end{aligned}\right.$$

On aura d'après la formule (91, p. 240),

(96)
$$\left\{\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\, dx &= \frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{+n\pi} \sin^2 y.dy \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{y - \sin y \cos y}{2}\right]_{-n\pi}^{+n\pi} = \pi, \end{aligned}\right.$$

résultat indépendant de n.

EXEMPLE II. — On obtiendra de même

$$(97)\left\{\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 nx.dx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)d\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{1}{n}\int_{-n\pi-\frac{\pi}{2}}^{+n\pi-\frac{\pi}{2}}\sin^2 y.dy=\frac{1}{n}\left[\frac{y-\sin y\cos y}{2}\right]_{-n\pi-\frac{\pi}{2}}^{+n\pi-\frac{\pi}{2}}=\pi.\end{aligned}\right.$$

212. On peut quelquefois apercevoir directement et sans aucun calcul la valeur d'une intégrale définie.

EXEMPLE. — Il est clair que l'on a, quel que soit n,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos nx.dx=0.$$

En effet, si l'on prend deux valeurs égales et de signes contraires de x, les éléments qui y aboutissent seront égaux et de signes contraires, car le facteur $\cos nx$ se retrouve le même pour les deux. Leur somme sera donc nulle, et comme tous les éléments peuvent être groupés ainsi, la somme totale ou l'intégrale définie sera elle-même égale à zéro.

213. Lorsqu'on a recours aux méthodes d'intégration qui ramènent la recherche d'une intégrale à une autre en réitérant plusieurs fois l'opération, on peut négliger les termes qui s'annulent aux deux limites et qui compliqueraient inutilement par leur présence les opérations intermédiaires en disparaissant au dernier moment. On rend souvent par là fort simples des calculs qui seraient autrement très-laborieux.

EXEMPLE. — Cherchons, d'après la méthode du § 204, l'intégrale suivante, dans laquelle n désigne un nombre

entier quelconque :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, . dx = \left[-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x . dx \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x . dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x . dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x . dx,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x . dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x . dx.$$

Il suffit donc pour abaisser l'exposant de deux unités de multiplier par $\frac{n-1}{n}$; tandis que pour l'intégrale générale il y aurait en outre un terme à ajouter à chaque opération.

D'après cela, si n est pair, on l'abaissera successivement jusqu'à zéro

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

et s'il est impair, jusqu'à l'unité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x . dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On aura par suite, en mettant la parité de n en évi-

dence,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, . dx = \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3.1}{2m\;(2m-2)(2m-4)\ldots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, . dx = \frac{2m\;(2m-2)(2m-4)\ldots 6.4.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\ldots 5.3.1}.$$

Je signalerai en passant une conséquence intéressante qu'on peut tirer de ces formules.

Si nous considérons l'intégrale définie comme une fonction $\varphi(n)$ de l'exposant n, $\varphi(2m+1)$ sera compris entre $\varphi(2m)$ et $\varphi(2m+2)$ ou $\varphi(n)$ entre $\varphi(n-2)$ et $\varphi(n)$ si on représente $2m$ par $n-2$. Mais le rapport de ces deux valeurs est, d'après l'équation précédente, $\frac{n-1}{n}$ ou $1-\frac{1}{n}$ et il devient l'unité lorsque n ou m croissent au delà de toutes limites. Donc on pourra considérer les deux dernières expressions comme égales, à la condition de ne pas les limiter, ce qui donne

$$\frac{\ldots 9.7.5.3}{\ldots 8.6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\ldots 8.6.4.2}{\ldots 9.7.5.3},$$

d'où on tire

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}$$

On obtient ainsi l'expression donnée par Wallis pour le rapport de la circonférence au diamètre ([1]).

([1]) Pour calculer le nombre π d'après cette formule, on doit, d'après la manière dont nous l'avons obtenue, la terminer de manière à avoir alternativement

$$\frac{\ldots 2m}{\ldots(2m-1)}, \quad \frac{\ldots 2m}{\ldots(2m+1)},$$

on obtient ainsi successivement des nombres trop grands et trop petits qui comprennent entre eux la valeur cherchée et dont l'intervalle se resserre à mesure qu'on fait croître m.

214. *Différentiation et intégration sous le signe somme.* — Désignons par a une constante arbitraire qui figure à titre de paramètre dans une expression à intégrer et par m et x deux limites qui ne dépendent en aucune façon de a. Je suppose que l'on sache trouver l'intégrale définie

$$\int_m^x f(x, a)\,dx = \mathrm{F}(a),$$

dans laquelle a subsistera en général.

On aura évidemment

$$\mathrm{F}'(a) = \frac{\mathrm{F}(a+da) - \mathrm{F}(a)}{da}$$
$$= \frac{\int_m^x f(x, a+da)\,dx - \int_m^x f(x, a)\,dx}{da}.$$

Les deux intégrales ayant les mêmes limites, on peut les réunir en une seule ; dx devient alors facteur commun de la différence ; enfin da étant une constante par rapport au symbole d'intégration et à ses limites, on peut le faire entrer sous le signe somme. Il vient ainsi

$$\mathrm{F}'(a) = \int_m^x \frac{f(x, a+da) - f(x, a)}{da}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_m^x \left(\frac{df}{da}\right) dx = \mathrm{F}'(a),$$

et généralement

$$\int_m^x \left(\frac{d^n f}{da^n}\right) dx = \mathrm{F}^{(n)}(a).$$

On déduit ainsi d'une intégrale définie une ou plu

sieurs autres entièrement différentes. Ce principe s'énonce en disant qu'on peut différentier sous le signe somme par rapport à un paramètre, lorsque les limites en sont indépendantes.

Exemple. — On a (80, p. 227)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

On en déduit (44), en prenant n fois la dérivée par rapport à a, cette intégrale plus générale,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}dx = \frac{1.2.3.4\ldots n}{a^{n+1}}.$$

215. Si on considère les deux expressions

$$\int_m^x dx\left[\int_n^a f(x, a)\,da\right], \quad \int_n^a da\left[\int_m^x f(x, a)\,dx\right],$$

on voit, d'après le principe précédent, qu'elles ont la même dérivée par rapport à x,

$$\int_n^a f(x, a)\,da,$$

elles ne pourraient donc différer que par une constante (184); mais elles s'annulent à la fois pour $x = m$, par suite elles sont égales. On a donc

$$\int_m^x dx\left[\int_n^a f(x, a)\,da\right] = \int_n^a \mathrm{F}(a)\,da.$$

On peut ainsi intégrer aussi bien que différentier sous le signe somme, par rapport à un paramètre dont les limites sont indépendantes. On obtiendra encore par là des inté-

grales définies tout à fait distinctes de celle qui sert de point de départ.

Exemple. — Si on change dans la formule (93, p. 247) n en a et m en $-b$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{e^{bx}}\,dx = \left[\frac{a\sin ax - b\cos ax}{(a^2+b^2)e^{bx}}\right]_0^\infty = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

En intégrant par rapport à a entre zéro et a, il vient (82, p. 227)

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{xe^{bx}}\,dx = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b};$$

expression dont on ne saurait trouver l'intégrale générale.

Si b se rapproche indéfiniment de zéro, on aura

$$\text{Pour } a>0:\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} = +\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = +\frac{\pi}{2},$$

$$\text{Pour } a<0:\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} = -\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi cette intégrale définie ne dépend en aucune façon de la valeur du paramètre a, mais elle dépend de son signe qui détermine le sien propre. Si a n'a pas de signe ou s'annule, arc tang $\frac{a}{b}$ s'annule quel que soit b, et par suite encore quand $b=0$, puisqu'il y a indépendance entre les deux paramètres. On a donc

$$\text{Pour } a=0:\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} = 0,\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = 0.$$

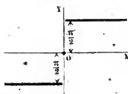
L'intégrale s'annule en même temps que a.

Si donc on construit entre les coordonnées x et y l'équation

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\,d\alpha.$$

qu'on obtient en changeant le symbole d'intégration x en α, et désignant le paramètre a par l'abscisse x; on obtiendra deux lignes droites dont l'ordonnée est égale à $\frac{\pi}{2}$ et qui s'arrêtent l'une et l'autre infiniment près de l'axe des ordonnées. Il y aura en outre un point isolé à l'origine.

Fig. 18.



Comme on n'est pas habitué à de pareils exemples de discontinuité, il n'est pas sans intérêt de vérifier directement ces résultats. Si on change pour cela dans l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

x en ax, les limites restent les mêmes, et il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{ax}\,dax = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

Comme on a pu changer le symbole d'intégration x en ax, sans modifier la valeur de l'intégrale, il s'ensuit que celle-ci est égale à la précédente qui ne renferme pas a, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la valeur de ce paramètre. Mais elle dépend de son signe, car tous les éléments auront ce signe, et par suite leur somme elle-même. Si le paramètre est nul, tous les éléments sont rigoureusement nuls, et par conséquent aussi l'intégrale.

§ III.

FORMULE DE SIMPSON.

216. Comme les intégrales définies jouent un grand rôle dans les applications, et que leur évaluation dépend de la théorie si imparfaite de l'intégration, il est naturel de chercher du moins un procédé approximatif. On possède à cet égard une formule complétement générale.

Soit x le symbole d'intégration et y sa fonction. Supposons en premier lieu que la limite inférieure soit zéro, et désignons la limite supérieure par 2Δ. La fonction y étant de celles qu'on ne sait pas intégrer, nous lui en substituerons une autre qui soit au contraire facilement intégrable; et, pour plus de simplicité, nous choisirons un trinôme du second degré. Mais comme il faut du moins qu'il représente le mieux possible la fonction dans l'étendue comprise entre zéro et 2Δ, nous disposerons de ses trois coefficients pour qu'il se confonde avec elle pour les valeurs y_0, y_1, y_2, qui correspondent à $x = 0, \Delta, 2\Delta$.

Nous poserons donc

$$y = y_0 + ax + bx^2.$$

La première condition étant évidemment remplie, il suffit de déterminer a et b par les deux autres

$$y_1 = y_0 + a\Delta + b\Delta^2,$$
$$y_2 = y_0 + 2a\Delta + 4b\Delta^2,$$

d'où on tire

$$a = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2\Delta}, \quad b = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2\Delta^2},$$

et, par suite,

$$y = y_0 + \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2\Delta}x + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2\Delta^2}x^2.$$

Formons l'intégrale sans constante

$$\int y\,dx = y_0 x + \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{4\Delta} x^2 + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{6\Delta^2} x^3.$$

Si nous la prenons entre les limites o et 2Δ, il viendra

$$\int_0^{2\Delta} y\,dx = \Delta\left[2y_0 + 4y_1 - y_2 - 3y_0 + \frac{4}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2)\right],$$

où en réduisant

$$\int_0^{2\Delta} y\,dx = \frac{\Delta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Telle est la formule simple de Simpson.

217. Elle offre ce grave inconvénient d'approcher fort peu de la réalité, lorsque la fonction présente une variation un peu accidentée ou lorsqu'on la prend entre des limites trop étendues. En effet, le trinôme ne se raccorde nécessairement avec elle qu'aux extrémités et au milieu de l'amplitude, et il peut s'en écarter beaucoup dans les intervalles. Mais rien ne nous empêche de subdiviser l'amplitude proposée en plusieurs autres assez petites pour que la formule précédente s'applique convenablement à chacune d'elles. Il suffit ensuite d'ajouter tous les résultats pour avoir la somme de tous les éléments compris dans l'intervalle entier. Effectuons cette transformation.

La dernière formule peut se mettre sous une autre forme en changeant le symbole d'intégration et spécifiant la fonction à intégrer

$$\int_0^{2\Delta} F(z)\,dz = \frac{\Delta}{3}\{F(0) + 4F(\Delta) + F(2\Delta)\}.$$

Posons

$$z = x - m, \quad dz = dx,$$

et

$$F(z) = f(x).$$

On aura pour

$$z = 0, \quad \Delta, \quad 2\Delta,$$
$$x = m, \quad m + \Delta, \quad m + 2\Delta,$$

par suite

$$F(0) = f(m), \quad F(\Delta) = f(m + \Delta), \quad F(2\Delta) = f(m + 2\Delta),$$

et, par conséquent, en ayant soin de changer les limites

$$\int_m^{m+2\Delta} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left\{f(m) + 4f(m + \Delta) + f(m + 2\Delta)\right\}.$$

Remplaçons successivement m par $m + 2\Delta$, $m + 4\Delta, \ldots,$ $m + k\Delta$, k étant un nombre pair; il viendra

$$\int_{m+2\Delta}^{m+4\Delta} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left\{f(m + 2\Delta) + 4f(m + 3\Delta) + f(m + 4\Delta)\right\}$$

$$\int_{m+4\Delta}^{m+6\Delta} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left\{f(m + 4\Delta) + 4f(m + 5\Delta) + f(m + 6\Delta)\right\}$$

. . . .

$$\int_{m+(k-2)\Delta}^{m+k\Delta} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left\{\begin{matrix} f[m + (k-2)\Delta] + 4f[m + (k-1)\Delta] \\ + f[m + k\Delta] \end{matrix}\right\}.$$

Ajoutons toutes ces équations. Chaque intégrale commençant où finit la précédente et portant sur la même expression, nous pouvons les réunir en une seule et écrire simplement

$$\int_m^{m+k\Delta} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left\{\begin{matrix} f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + \ldots \\ + 2f_{k-4} + 4f_{k-3} + 2f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k \end{matrix}\right\}.$$

Si maintenant nous posons

$$m + k\Delta = n, \quad \Delta = \frac{n - m}{k},$$

nous aurons la formule définitive

$$\int_m^n f(x)\,dx = \frac{n-m}{3k}\left\{\begin{array}{l} f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots \\ \quad + 2f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k \end{array}\right\}.$$

On obtiendra donc la valeur d'une intégrale numérique quelconque en partageant l'amplitude $m-n$ de la variable en un nombre pair k de parties égales, calculant les $k+1$ valeurs de la fonction pour les points de division et appliquant la formule précédente. La question sera par là ramenée à l'évaluation numérique de la fonction proposée et non plus à son intégration.

Exemple. — Cherchons l'intégrale définie

$$\int_{10}^{20} \log x \,.\, dx.$$

Si nous prenons dix intervalles, la formule donnera

$$\frac{20-10}{3.10}\left\{\begin{array}{l} \log 10 + 4\log 11 + 2\log 12 + 4\log 13 \\ + 2\log 14 + 4\log 15 + 2\log 16 + 4\log 17 \\ + 2\log 18 + 4\log 19 + \log 20 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} \log 10 + \log 20 \\ + 2(\log 12 + \log 14 + \log 16 + \log 18) \\ + 4(\log 11 + \log 13 + \log 15 + \log 17 + \log 19) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \left|\begin{array}{l} 1{,}0000000 \\ 1{,}3010300 \\ \\ \\ \\ \end{array}\right| + 2\left|\begin{array}{l} 1{,}0791812 \\ 1{,}1461280 \\ 1{,}2041200 \\ 1{,}2552725 \\ \\ \end{array}\right| + 4\left|\begin{array}{l} 1{,}0413927 \\ 1{,}1139433 \\ 1{,}1760913 \\ 1{,}2304489 \\ 1{,}2787536 \end{array}\right| \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\{2{,}3010300 + 2.4{,}6847017 + 4.5{,}8406298\}.$$

$$= \frac{1}{3}\{2{,}3010300 + 9{,}3694034 + 23{,}3625192\}$$

$$= \frac{1}{3}.35{,}0329526 = 11{,}6776502.$$

Pour apprécier le degré d'exactitude de la formule, calculons directement l'intégrale définie. Elle aura pour valeur (89, p. 239)

$$[x(\log x - \log e)]_{10}^{20} = 20\log 20 - 10(1 + \log e)$$
$$= 20.1,3010300 - 10.1,43429448$$
$$= 26,0206000 - 14,3429448$$
$$= 11,6776552.$$

L'erreur absolue est donc en moins

$$11,6776552 - 11,6776502 = 0,000005.$$

Mais ce n'est pas sa valeur elle-même qu'il faut considérer, car une même différence dans l'évaluation d'une petite ou d'une grande quantité peut indiquer une méthode défectueuse ou satisfaisante. L'erreur relative ou le rapport de l'erreur absolue à la quantité à évaluer est ici

$$\frac{0,000005}{11,6776552} = 0,000000428 16 = \frac{1}{2335531}.$$

On peut d'après son extrême petitesse se faire une idée du degré d'exactitude de la méthode de Simpson.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

§ I.

VALEURS MOYENNES DES FONCTIONS.

218. On appelle *moyenne* d'un certain nombre de quantités le quotient de leur somme par leur nombre. Pour apprécier la valeur moyenne d'une fonction continue $f(x)$ entre deux limites x et X de la variable, nous partagerons l'amplitude $\mathrm{X} - x$ en un nombre infini n de parties égales dx, et nous considérerons les valeurs de la fonction qui répondent aux points de division. La moyenne sera d'après la définition

$$\frac{f(x) + f(x + dx) + f(x + 2\,dx) + \ldots + f(\mathrm{X})}{n}.$$

Multiplions les deux termes de la fraction par dx, elle deviendra

$$\frac{f(x)\,dx + f(x + dx)\,dx + f(x + 2\,dx)\,dx + \ldots + f(\mathrm{X})\,dx}{n\,dx}.$$

Or le numérateur est (207) l'intégrale définie de la fonction entre les limites x et X ; et le dénominateur est l'amplitude $\mathrm{X} - x$, puisque celle-ci avait été partagée en n parties égales à dx :

$$\frac{\int_x^{\mathrm{X}} f(x)\,dx}{\mathrm{X} - x}.$$

Ainsi la valeur moyenne d'une fonction entre deux limites est le rapport de son intégrale définie à la différence de ces limites.

219. Exemple I. — Cherchons, par exemple, la valeur moyenne du sinus dans le premier quadrant. Nous aurons à prendre

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x . dx}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Cette valeur est 0,63662... et correspond à un angle d'environ 39° 32′ 25″. On voit que ni l'une ni l'autre ne sont la moyenne arithmétique de leurs limites, avec laquelle il faut bien se garder de confondre la valeur moyenne telle que nous l'avons considérée.

Exemple II. — Désignons par n un nombre positif ou compris entre zéro et -1, et cherchons la valeur moyenne de l'expression

$$y = ax^n$$

entre zéro et une limite quelconque x. Nous aurons

$$\frac{\int_0^x ax^n dx}{x} = \frac{a}{(n+1)x}\left[x^{n+1}\right]_0^x = \frac{ax^n}{n+1} = \frac{y}{n+1}.$$

La moyenne est donc proportionnelle à la valeur limite.

§ II.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

220. Nous avons mis en usage (198) la méthode de l'intégration par décomposition pour obtenir du moins le dé-

veloppement en série des intégrales, quand on n'en peut pas trouver l'expression finie. On peut appliquer ce principe d'une manière inverse pour développer des fonctions connues.

Désignons par $f(x)$ une expression dont le développement, par la formule de Maclaurin, exigerait des calculs compliqués, tandis que la dérivée $f'(x)$ est facile à réduire en série par un procédé quelconque. Formons ce développement, puis supposons qu'on ait multiplié cette équation par dx et qu'on l'écrive pour les valeurs x, $x+dx$, $x+2\,dx$, ... En ajoutant ensuite membre à membre, on obtiendra (207) l'égalité des intégrales définies des deux membres prises entre les mêmes limites.

C'est là un fait général et on peut toujours intégrer une équation entre deux limites quelconques, pourvu qu'elles soient les mêmes pour les deux membres.

Prenons ici une limite supérieure quelconque x, nous ferons reparaître dans le premier membre $f(x)$ et le second contiendra la série qui l'exprime. Prenons aussi, pour plus de simplicité, zéro comme limite inférieure. Quand on substituera cette valeur, la série se réduira à son premier terme, et le premier membre à $f(0)$. Et cette quantité est finie; sans quoi il n'y aurait pas lieu de chercher à développer $f(x)$ en série procédant suivant les puissances entières et positives.

221. Exemple I. — Considérons la fonction arc tang x, sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$ et on peut la réduire en série en recourant simplement à la règle de la division algébrique

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots$$

Intégrant de zéro à x

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

on retrouve ainsi la formule (20, p. 96).

Exemple II. — Prenons maintenant arc sin x et développons sa dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ par la formule du binôme. Nous avons trouvé (23, p. 99)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \dots$$

Intégrant de zéro à x

$$\text{arc sin}\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} + \dots,$$

formule qu'il serait très-long de déduire de celle de Maclaurin.

Si on fait en particulier $x = 1$, on obtient cette valeur du rapport de la circonférence au diamètre

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} + \dots$$

222. *Formule de Taylor.* — On peut déduire du calcul intégral la série générale de Taylor. Remarquons en effet que la dérivée de $f(a-\alpha)$ relative à α est $-f'(a-\alpha)$, de sorte que l'intégrale sans constante de $f'(a-\alpha)$ est $-f(a-\alpha)$. On aura donc, en la prenant entre zéro et une limite x quelconque,

$$\int_0^x f'(a-\alpha)\,d\alpha = f(a) - f(a-x).$$

Mais on a d'autre part, en intégrant par parties,

$$\int_0^x f'(a-\alpha)\,d\alpha = \left[\frac{\alpha}{1}f'(a-\alpha)\right]_0^x + \frac{1}{1}\int_0^x \alpha f''(a-\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int_0^x f''(a-\alpha)\alpha\,d\alpha = \left[\frac{\alpha^2}{2}f''(a-\alpha)\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \alpha^2 f'''(a-\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int_0^x f'''(a-\alpha)\alpha^2\,d\alpha = \left[\frac{\alpha^3}{3}f'''(a-\alpha)\right]_0^x + \frac{1}{3}\int_0^x \alpha^3 f^{\text{IV}}(a-\alpha)\,d\alpha,$$

. . . .

Or le premier terme de chaque formule donne, si on suppose que $f^{(k)}(a)$ ne soit pas infini,

$$\left[\frac{\alpha^k}{k}f^{(k)}(a-\alpha)\right]_0^x = \frac{x^k}{k}f^{(k)}(a-x).$$

On aura donc, en substituant de proche en proche,

$$\begin{aligned} & f(a)-f(a-x) \\ &= \frac{x}{1}f'(a-x) + \frac{x^2}{1.2}f''(a-x) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(a-x) \\ &+ \frac{x^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a-x) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a-x) \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x f^{(n)}(a-\alpha)\,\alpha^{n-1}\,d\alpha, \end{aligned}$$

en s'arrêtant au $(n-1)^{\text{ième}}$ terme. Si maintenant on change a en $a+x$, il viendra

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(a) + \frac{x}{1}f'(a) + \frac{x^2}{1.2}f''(a) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(a) \\ &+ \frac{x^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x f^{(n)}(x+a-\alpha)\,\alpha^{n-1}\,d\alpha, \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le développement de Taylor, mais avec cet avantage qu'on peut l'arrêter à un terme quelconque et obtenir la valeur exacte du reste de la série dans l'intégrale définie

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x f^{(n)}(x+a-\alpha)\,\alpha^{n-1}\,d\alpha.$$

La formule de Maclaurin se déduit de celle de Taylor en faisant $a=0$. On aura donc pour le reste de cette série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x f^{(n)}(x-\alpha)\,\alpha^{n-1}\,d\alpha.$$

223. On peut donner au reste une autre forme. Remarquons en effet que l'intégrale définie est la somme des éléments $\alpha^{n-1}\,d\alpha$ multipliés chacun par la valeur correspondante de $f^{(n)}(x+a-\alpha)$. On peut concevoir une certaine valeur intermédiaire de $f^{(n)}(x+a-\alpha)$ qui donnerait le même résultat si on la prenait comme facteur de tous les éléments $\alpha^{n-1}d\alpha$ ou de leur somme

$$\int_0^x \alpha^{n-1}\,d\alpha = \left[\frac{\alpha^n}{n}\right]_0^x = \frac{x^n}{n}.$$

Quant à cette valeur, si on suppose la fonction $f^{(n)}$ continue dans les limites 0 et x de sa variable, ce sera certainement une de celles qu'elle prend dans cet intervalle; elle correspond donc à une valeur de α comprise entre les limites 0 et x, et par suite à une de $x-\alpha$ également comprise entre 0 et x et qu'on peut représenter par θx; θ désignant un nombre, inconnu d'ailleurs, mais inférieur à l'unité. On aura ainsi pour l'expression du reste

de la formule de Taylor quand on s'arrête au $n^{ième}$ terme

$$\frac{x^n}{1.2\,3\ldots n}f^{(n)}(a+\theta x),$$

et pour celui de la formule de Maclaurin

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x).$$

Exemple I. — On a trouvé (44)

$$f(x)=e^x,\quad f^{(n)}(x)=e^x,$$

par suite, d'après le reste de la série de Maclaurin,

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{x^n e^{\theta x}}{1.2.3\ldots n}.$$

Exemple II. — On a aussi trouvé (44)

$$f(x)=Lx,\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n};$$

par suite, d'après le reste de la série de Taylor,

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{(-x)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n}\left(\frac{-x}{1+\theta x}\right)^n.$$

§ II.

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

224. On emploie souvent dans l'analyse des séries qui ne procèdent pas suivant les puissances de la variable. L'une des formes les plus usitées est ordonnée par rapport

aux sinus et cosinus des multiples de x [1],

$$f(x) = A + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots$$
$$+ C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \ldots$$

On en peut déterminer d'une manière générale les coefficients.

Pour obtenir le terme indépendant, multiplions par dx et intégrons entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Il vient par là

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = A\int_{-\pi}^{+\pi} dx$$
$$+ \sum B_m \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\,.\,dx + \sum C_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,.\,dx,$$

ou, d'après les formules (94, p. 252),

$$2\pi A = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

en changeant pour plus de clarté le symbole d'intégration.

Pour avoir le coefficient général B_n des sinus, multiplions par $\sin nx\,.\,dx$ et intégrons entre les mêmes limites :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\,.\,dx = A\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,.\,dx + B_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\,.\,dx$$
$$+ \sum B_m \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\,.\,dx + \sum C_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\,.\,dx.$$

D'après les formules (95, p. 253) les deux sommes dispa-

---

[1] J'avertis de nouveau que l'emploi des séries donne lieu à des difficultés assez délicates. Les séries trigonométriques en particulier sont sujettes à des restrictions nombreuses que je suis obligé de passer sous silence pour ne pas sortir du cadre que je me suis imposé. J'ai voulu seulement donner une idée d'une des parties les plus intéressantes de l'analyse.

raissent, car m et n y sont entiers et différents, puisque le $n^{ième}$ terme a été mis en évidence. On aura donc d'après (94) et (96, p. 253)

$$\pi B_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha . d\alpha.$$

On opérera de même pour avoir le coefficient général des cosinus en multipliant par $\cos nx . dx$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx . dx = A \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx . dx + C_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx . dx$$

$$+ \sum B_m \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx . dx + \sum C_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx . dx;$$

d'où (97, p. 254)

$$\pi C_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha . d\alpha.$$

En multipliant par π l'égalité qui nous a servi de point de départ, on obtient la série de Fourier

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha$$

$$+ \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin \alpha . d\alpha + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin 2\alpha . d\alpha + \ldots$$

$$+ \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos \alpha . d\alpha + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos 2\alpha . d\alpha + \ldots$$

225. Exemple. — Faisons simplement

$$f(x) = x.$$

Tous les cosinus disparaîtront alors de la série (212), ainsi que le premier terme. On aura de plus pour le coefficient

général des sinus (90, p. 239)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha.d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} \alpha\sin n\alpha.d\alpha$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} n\alpha.\sin n\alpha.dn\alpha = \frac{1}{n^2}\int_{-n\pi}^{+n\pi} \beta\sin\beta.d\beta$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big[\sin\beta - \beta\cos\beta\Big]_{-n\pi}^{+n\pi} = \pm\frac{2\pi}{n},$$

avec le signe supérieur ou inférieur suivant que n est impair ou pair. Il vient, par suite,

$$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

On obtient une vérification de cette formule en faisant $x = \frac{\pi}{2}$; on retrouve par là la série de Leibnitz (21, p. 96).

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

226. L'objet principal sinon exclusif de la géométrie est la mesure des grandeurs : lignes, surfaces ou volumes. Le calcul intégral se prête très-bien à ce genre de recherches, au moyen du théorème fondamental (207) qui ramène la recherche d'une somme d'éléments au calcul d'une intégrale définie. L'élément est en effet facile à évaluer par les principes de la géométrie élémentaire, puisqu'on peut le dégager de toutes les quantités infiniment petites par rapport à lui, qui constituent précisément la difficulté de la question. Par exemple, on confondra un arc élémentaire avec sa corde, une aire curviligne avec celle d'un polygone d'une infinité de côtés, etc.

Nous aurons donc toujours deux problèmes à résoudre, l'évaluation de l'élément et son intégration. C'est ce que nous allons faire successivement pour les différents cas qui peuvent se présenter.

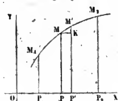
§ I.

RECTIFICATION DES COURBES.

227. *Courbes planes en coordonnées rectangulaires.* — Nous désignerons par s l'arc indéfini et par ds son élément MM'. On peut, sauf des infiniment petits d'ordre supérieur, le confondre avec sa corde. Celle-ci est l'hypoté-

nuse du triangle rectangle MM'K, dont les deux autres

Fig. 19.



côtés sont dx et dy. On a donc

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Pour passer de l'élément à l'arc lui-même, on le mettra sous la forme

$$ds = dx\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2},$$

et on tirera $\frac{dy}{dx}$ de l'équation de la courbe en fonction de x seul. Le théorème (207) permettra alors de faire la somme de tous les éléments compris entre les points arbitraires M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 au moyen de l'intégrale définie

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}.$$

L'une des limites x_2 pourra rester quelconque, mais on aura toujours soin de choisir x_1 de manière à simplifier le plus possible le résultat. On ne particularisera par là en aucune façon, puisqu'un arc quelconque peut toujours être considéré comme la différence de deux autres qui aboutissent à un point donné M_1.

On peut avoir à évaluer le contour entier d'une ligne fermée, que je suppose convexe pour fixer les idées. L'équa-

tion devra alors pour chaque valeur de x en fournir deux de y :

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

On considérera successivement les deux branches qu'elles fournissent, et on les rectifiera au moyen des formules

$$s_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left[\frac{dy_1}{dx}\right]^2}, \quad s_2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left[\frac{dy_2}{dx}\right]^2},$$

$$s = s_1 + s_2.$$

Les limites x_1 et x_2 seront alors les abscisses extrêmes de ces branches, c'est-à-dire celles des points où elles se soudent l'une à l'autre et où les deux valeurs de y se confondent en une seule. On pourra déterminer ces points, soit par l'équation

$$f_1(x) = f_2(x),$$

soit par la méthode de recherche des points limites (122).

228. Exemple. — Considérons la chaînette qui est représentée par l'équation

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

et cherchons sa longueur comptée à partir de son sommet (*fig.* 8, p. 175).

On tire de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2,$$

$$s = \int_0^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comme cette valeur reproduit celle de $\frac{dy}{dx}$ et que les coordonnées sont rectangulaires, on peut aussi écrire

$$s = \operatorname{tang} \varphi,$$

et on retrouve ainsi la seconde forme que nous avons employée pour l'équation de la chaînette (146, I).

On a aussi identiquement, d'après les valeurs qui précèdent,

$$s = y \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y \sin \varphi = \mathrm{MS};$$

donc l'arc de la chaînette est égal à la projection de l'ordonnée sur la tangente.

Le point S appartiendra par suite à la développante qui part du sommet A. La ligne SP sera sa tangente, car elle est perpendiculaire sur SM. Or on a

$$\mathrm{SP} = \frac{\mathrm{MS}}{\operatorname{tang} \mathrm{MPS}} = \frac{s}{\operatorname{tang} \varphi} = 1.$$

La tangente de cette courbe est donc constante et par suite la développante de la chaînette est une tractrice DAD' (121).

229. *Courbes planes en coordonnées polaires.* — L'arc élémentaire MM' ou plutôt sa corde (*fig.* 6, p. 155) forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle MKM' dont les côtés sont dr et $r d\theta$ (127). On a par suite

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Pour passer de l'élément à l'arc lui-même, on le mettra sous la forme

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2};$$

on tirera r et $\frac{dr}{d\theta}$ de l'équation de la courbe en fonction de θ seulement, et on aura, comme dans le cas précédent,

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2}.$$

On procédera encore de la même manière pour obtenir le contour d'une ligne fermée.

230. Exemple. — Considérons la spirale logarithmique qui est représentée par l'équation

$$r = m^\theta,$$

et cherchons sa longueur à partir du pôle. Nous allons reconnaître, en effet, qu'elle reste finie, quoique composée d'une infinité de spires.

On tire de l'équation

$$\frac{dr}{d\theta} = m^\theta Lm,$$

$$\sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2} = \sqrt{m^{2\theta} + m^{2\theta} L^2 m} = m^\theta \sqrt{1 + L^2 m}.$$

Nous pouvons toujours supposer $m > 1$. Il suffirait, s'il en était autrement, de renverser le sens de la courbe, ce qui changerait θ en $-\theta$ ou m en $\frac{1}{m}$. On aura alors (128, I)

$$s = \int_{-\infty}^{\theta} m^\theta \sqrt{1 + L^2 m}.d\theta = \left[\frac{\sqrt{1 + L^2 m}}{Lm} m^\theta\right]_{-\infty}^{\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \mu}}{\cot \mu} . m^\theta = \frac{r}{\cos \mu}.$$

Mais r est le côté d'un triangle rectangle OMS (*fig.* 7, p. 156) dont μ est l'angle adjacent, par suite s en est l'hypoténuse MS. Ainsi l'arc de la spirale logarithmique est égal à sa tangente (129).

231. *Courbes gauches.* — Si $d\sigma$ désigne la projection horizontale de l'arc ds, celui-ci sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle situé dans un plan vertical et dont $d\sigma$ et dz seront les deux autres côtés. On aura donc

$$ds^2 = d\sigma^2 + dz^2.$$

Mais $d\sigma$ est l'arc élémentaire de la courbe plane, projection horizontale de la proposée. Donc (227)

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2,$$

et enfin

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Pour revenir de l'élément à l'arc lui-même, on écrira

$$ds = dx\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2},$$

et on substituera en fonction de x seul les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ tirées des deux équations de la courbe. On aura ensuite

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2}.$$

On procédera, comme dans le premier cas (227), pour avoir le contour d'une ligne fermée.

232. Exemple. — Considérons l'hélice qui est représentée par les équations

$$y = \cos mx, \quad z = \sin mx,$$

et cherchons sa longueur à partir du point où elle coupe l'axe des y.

On tire des équations

$$\frac{dy}{dx} = -m \sin mx, \quad \frac{dz}{dx} = m \cos mx,$$

$$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2 = 1 + m^2 \sin^2 mx + m^2 \cos^2 mx = 1 + m^2,$$

et, par suite (176),

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1+m^2} = \sqrt{1+m^2}.[x]_0^x = \sqrt{1+\cot^2 i}.x = \frac{x}{\sin i}.$$

On voit par là que l'arc d'hélice est proportionnel à sa projection sur l'axe de la courbe.

§ II.

QUADRATURE DES AIRES PLANES.

233. *Coordonnées rectangulaires.* — Nous nous proposons de trouver pour une ligne plane quelconque l'aire S du trapèze mixtiligne formé par la courbe, l'axe des abscisses, et deux ordonnées quelconques, M_1P_1 et M_2P_2 (*fig.* 19, p. 277).

L'élément de cette aire sera le trapèze mixtiligne MM'PP'. On peut le confondre avec le rectangle MKPP', car il n'en diffère que par le triangle mixtiligne MM'K qui a deux dimensions infiniment petites, tandis que le rectangle n'en a qu'une. Mais ce dernier a pour surface le produit de ses deux dimensions, donc

$$dS = y\,dx,$$

ce qu'on énonce quelquefois en disant que l'ordonnée est la dérivée de l'aire.

Pour remonter de l'élément à l'aire elle-même, on remplacera y par sa valeur tirée de l'équation de la courbe; le théorème (207) permettra alors de faire la somme S de tous les éléments compris entre les points arbitraires M_1 et M_2 au moyen de l'intégrale définie

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx.$$

On peut reproduire ici les observations que nous avons déjà faites (227) sur le choix des limites.

Pour obtenir l'aire intérieure d'une courbe fermée, on opérera comme pour la recherche du contour (227). Mais on devra employer la formule

$$S = S_1 - S_2,$$

parce que les deux aires ainsi calculées se recouvrent, tandis que les arcs étaient en prolongement l'un de l'autre.

Exemple. — Cherchons l'aire de l'hyperbole équilatère

$$xy = 1,$$

à partir de son sommet. On aura

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x} = [Lx]_1^x = Lx.$$

234. Si nous désignons par Y l'ordonnée moyenne dans l'intervalle de x_1 à x_2, on aura (218)

$$Y = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}{x_2 - x_1};$$

d'où

$$(x_2 - x_1)\,Y = S,$$

ce qui montre que l'ordonnée moyenne est celle d'un rectangle qui aurait même base et même surface que la courbe dans l'étendue que l'on considère.

Exemple. — Considérons les paraboles d'ordre quelconque

$$y = ax^n,$$

et cherchons-en l'aire à partir de l'origine. On a trouvé (219)

$$Y = \frac{y}{n+1},$$

et comme la base est x,

$$S = \frac{xy}{n+1};$$

l'aire est donc proportionnelle au rectangle des coordonnées extrêmes.

On a, par exemple, pour la parabole ordinaire

$$n = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{2}{3}.$$

Ce résultat exige (219, II) que n soit supérieur à -1. S'il est positif, c'est-à-dire pour les *paraboles quelconques*, la condition est toujours remplie. Pour les *hyperboles quelconques*, n est négatif et les deux axes sont des asymptotes. Or on peut prendre les deux formes équivalentes

$$y = ax^{-n}, \quad x = \sqrt[n]{a} \cdot y^{-\frac{1}{n}},$$

et il y en a toujours une des deux pour laquelle l'exposant est inférieur en valeur absolue à l'unité, ce qui satisfait à la condition précédente. Ainsi le résultat subsiste pour les hyperboles, mais à la condition que les aires soient

comptées à partir de celle des deux asymptotes qui correspond au plus petit exposant.

Un seul cas échappe à la règle générale, c'est celui où $n = -1$, car on a encore $\frac{1}{n} = -1$. Mais l'équation représente alors l'hyperbole équilatère que nous avons considérée directement (233) et pour laquelle la loi est entièrement différente.

235. *Coordonnées polaires.* — Proposons-nous de trouver pour une courbe quelconque l'aire S du triangle mixtiligne formé par la courbe et deux rayons vecteurs quelconques qui correspondent aux azimuts θ_1 et θ_2.

L'élément de cette aire sera le triangle mixtiligne OM M' (*fig.* 6, p. 155). On peut le confondre avec le secteur circulaire OMK, car il n'en diffère que par le triangle mixtiligne MM'K dont les deux dimensions sont infiniment petites, tandis que l'une de celles de OMM' est finie. Ce secteur ayant pour rayon r et pour angle $d\theta$ a pour surface

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Pour remonter de l'élément à l'aire elle-même, on substituera r d'après l'équation de la courbe en fonction de θ. On aura ensuite

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta.$$

L'évaluation d'une aire fermée se fera comme au § 233.

236. Exemple. — Considérons la spirale logarithmique

$$r = m^\theta,$$

et cherchons-en l'aire comptée à partir du pôle. On voit

que les différentes spires se recouvrent l'une l'autre, de sorte que le résultat ainsi obtenu servira seulement à trouver la surface d'un triangle mixtiligne en prenant la différence des aires qui aboutissent à ses deux côtés.

On a, d'après l'équation de la courbe,

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} m^{2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{m^{2\theta}}{2\,Lm}\right]_{-\infty}^{\theta} = \frac{m^{2\theta}}{4\cot\mu} = \frac{r^2 \operatorname{tang}\mu}{4}.$$

Si on considère le triangle rectangle MOS (*fig.* 7, p. 156), il a pour côtés $OM = r$, $OS = r\operatorname{tang}\mu$, et pour surface $\frac{1}{2}r^2\operatorname{tang}\mu$. Par suite l'aire de la spirale logarithmique est la moitié de celle du triangle formé par le rayon vecteur, sa perpendiculaire et la tangente.

§ III.

QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

237. Nous nous proposons de chercher la superficie S de la *calotte* courbe qui est comprise dans un contour tracé à volonté sur une surface quelconque.

Pour en trouver d'abord l'élément, menons une infinité de plans parallèles à celui des YZ, tous équidistants et séparés par l'intervalle dx. Ils découperont la calotte en *zones* infiniment étroites dS. En menant ensuite une infinité de plans parallèles à celui des ZX séparés par l'intervalle constant dy, on divisera chaque zone en *carreaux* élémentaires d^2S dont il s'agit de trouver la valeur.

Tous les carreaux ont pour projections horizontales des rectangles qui ont pour côtés dx, dy, et pour surface $dx\,dy$. Dans cette étendue infiniment petite la surface peut être confondue avec son plan tangent, ou le carreau considéré comme un quadrilatère plan. On sait qu'alors sa projection

est le produit de sa surface d^2S par le cosinus de l'angle des deux plans, ou de l'inclinaison φ du plan tangent sur le plan horizontal. On a donc

$$d^2S.\cos\varphi = dx\,dy,$$

$$d^2S = \frac{dx\,dy}{\cos\varphi}.$$

Mais cette inclinaison a été calculée d'une manière générale (64, p. 215). Il vient, par suite,

$$d^2S = dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

238. Pour passer de l'élément à la superficie elle-même, on commencera par différentier l'équation de la surface successivement par rapport à x et à y. On en tirera les deux dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, et on les substituera en fonction de x et y seulement dans l'expression de l'élément.

Il faudra ensuite ajouter tous les carreaux ensemble. Nous ferons cette opération en deux fois, en groupant d'abord tous ceux qui constituent une zone, de manière à avoir l'expression de cette zone; puis ajoutant toutes les zones ensemble pour avoir la calotte entière. Deux intégrations seront donc nécessaires. On les dirigera de la manière suivante.

Le caractère commun à tous les carreaux d'une même zone est d'avoir la même abscisse, qu'on peut considérer comme celle de la zone. Nous serons donc sûrs de prendre tous les carreaux qui constituent cette bande, et rien qu'eux, en attribuant par la pensée à x une valeur fixe, et laissant, au contraire, varier y d'un carreau à l'autre. En d'autres termes, il faut faire une première intégration par rapport à y en traitant x comme une constante.

Pour fixer les limites de cette intégrale définie, il est nécessaire de se donner par son équation

$$y=f(x),$$

tout à fait indépendante de celle de la surface, la projection horizontale du contour de la calotte. Cette ligne est nécessairement fermée et par suite son équation se dédoublera en deux

$$y_1=f_1(x), \quad y_2=f_2(x).$$

Lorsque x a reçu la valeur qui caractérise la zone dont on s'occupe, y_1 et y_2 sont les ordonnées de son premier et de son dernier carreau [1]. Ce sont, par suite, les limites entre lesquelles il faut faire varier y. Nous aurons donc pour la valeur de la zone

$$dS = dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

239. Dans cette expression y a disparu, comme cela a toujours lieu pour le symbole d'intégration; mais x y figure à double titre, d'abord parce qu'il préexistait dans l'expression où il a été traité comme un paramètre constant, ensuite parce que les deux limites par lesquelles on a remplacé le symbole d'intégration y, sont des fonctions de x, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Pour ajouter ensemble toutes les zones, il faudra encore intégrer par rapport à x en le faisant varier depuis la plus petite jusqu'à la plus grande des valeurs qu'il prend dans l'étendue considérée. Ces quantités x_1, x_2, qui sont le maximum et le minimum de x, se détermineront, soit d'après le

[1] A proprement parler il y a souvent sur le bord non plus un carreau, mais un triangle mixtiligne. Mais on peut le négliger vis-à-vis de la zone elle-même et considérer le carreau qui le suit immédiatement.

mode de recherche des points limites (122), soit par l'équation

$$f_1(x) = f_2(x).$$

On aura donc enfin pour l'expression de la calotte courbe

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

240. Lorsqu'on cherchera la superficie complète d'une surface fermée que je suppose convexe pour plus de simplicité, l'équation de la surface donnera nécessairement pour l'ordonnée deux valeurs

$$z_1 = F_1(x, y), \quad z_2 = F_2(x, y).$$

Elles correspondent aux deux nappes qui sont séparées par le contour apparent de la surface relatif au plan horizontal. On trouvera celui-ci soit d'après la méthode générale (179), soit en exprimant que les deux nappes se soudent l'une à l'autre le long de cette ligne, ce qui donne l'équation

$$F_1(x, y) = F_2(x, y).$$

On considérera successivement ces deux valeurs de l'ordonnée pour trouver les superficies S_1 et S_2 des deux calottes correspondantes et l'on aura ensuite

$$S = S_1 + S_2.$$

241. Exemple. — Cherchons la surface complète de la sphère qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

On en tire pour la nappe supérieure

$$z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

On a ensuite pour le contour apparent

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

$$y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad y_2 = +\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$x_1 = -R, \quad x_2 = +R.$$

L'expression générale devient par conséquent (79, p. 226)

$$S_1 = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= R \int_{-R}^{+R} dx \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= R \int_{-R}^{+R} dx\,[\arcsin(+1) - \arcsin(-1)]$$

$$= \pi R \int_{-R}^{+R} dx = \pi R\,[x]_{-R}^{+R} = 2\pi R^2;$$

Comme on trouverait évidemment le même résultat pour la

nappe inférieure S_2, il vient

$$S = 4\pi R^2.$$

242. *Surfaces de révolution.* — On peut simplifier notablement les opérations quand la surface est de révolution. Nous prendrons son axe pour celui des z, et nous chercherons la superficie d'une zone finie comprise entre les deux parallèles arbitraires qui correspondent aux ordonnées z_1 et z_2.

L'élément sera une zone infiniment petite décrite par l'arc élémentaire ds du méridien. On peut le confondre avec la surface du tronc de cône qui est engendré par la corde $\sqrt{dx^2 + dz^2}$, avec le rayon de base x qu'on peut aussi bien considérer comme le rayon moyen. On aura donc

$$dS = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dz^2}.$$

Pour passer de l'élément à la zone elle-même, on mettra cette expression sous la forme

$$dS = 2\pi x \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dz}\right]^2}\, dz,$$

et on remplacera x et $\frac{dx}{dz}$ en fonction de z d'après l'équation de la courbe méridienne qui doit être connue entre z et x. On aura ensuite

$$S = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} x \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dz}\right]^2}\, dz.$$

243. Exemple. — Cherchons la superficie du *tore* ou de la surface engendrée par la révolution d'un cercle. Nous la considérerons comme la somme des deux nappes qui sont décrites par les deux moitiés du cercle séparées par le diamètre parallèle à l'axe de révolution.

L'équation de la méridienne sera, en plaçant l'équateur dans le plan des XY,

$$(x - R)^2 + z^2 = r^2,$$
$$x_1 = R - \sqrt{r^2 - z^2}, \quad x_2 = R + \sqrt{r^2 - z^2}.$$

A chaque élément ds de la demi-circonférence située du côté de l'axe et qui a pour distance à cet axe x_1, en correspond un égal de l'autre demi-circonférence à la distance x_2. La somme des éléments superficiels qu'ils décrivent sera

$$2\pi x_1 ds + 2\pi x_2 ds = 2\pi ds(x_1 + x_2) = 4\pi R ds.$$

La surface complète sera donc, en faisant varier ds dans toute l'étendue de la demi-circonférence méridienne,

$$S = \int_0^{\pi r} 4\pi R ds = 4\pi R [s]_0^{\pi r} = 4\pi^2 R r = 2\pi r . 2\pi R.$$

Ainsi donc la surface du tore est le produit de la circonférence méridienne par celle que décrit son centre.

§ IV.

CUBATURE DES VOLUMES.

244. Nous chercherons pour une surface quelconque le volume V de la *colonne* comprise entre une calotte quelconque, son cylindre projetant et le plan horizontal. Pour former son élément, nous mènerons encore deux séries de plans parallèles aux plans verticaux, la première donnera une série de *tranches* dV et la seconde découpera dans chacune d'elles une série de *colonnes élémentaires* d^2V.

Pour évaluer l'une de ces dernières, on peut la confondre avec le parallélipipède rectangle droit qu'on obtient en

la tronquant par un plan horizontal mené par le point le plus bas du carreau qui la surmonte. En effet, la partie ainsi supprimée a trois dimensions infiniment petites, tandis que la colonne n'en a que deux. La base de ce parallélipipède est, comme nous l'avons vu, $dxdy$ et sa hauteur z. Il a donc pour volume

$$d^2V = z dx dy.$$

Pour passer de l'élément au volume fini, on remplacera z en fonction de x et de y d'après l'équation de la surface. Puis on groupera successivement les éléments qui composent une tranche, et les tranches qui constituent la colonne proposée, en reproduisant identiquement les raisonnements du § 238. On obtiendra ainsi, en conservant les mêmes notations,

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy.$$

Pour trouver le volume compris dans l'intérieur d'une surface fermée, on opérera encore de la même manière. Mais on appliquera la formule

$$V = V_1 - V_2,$$

car les deux colonnes se pénètrent, tandis que les deux calottes étaient en prolongement.

245. Exemple. — Considérons le *plan gauche* ou *paraboloïde hyperbolique* rapporté à son sommet et à ses plans directeurs que je suppose rectangulaires. Il aura pour équation

$$z = mxy.$$

Nous chercherons le volume d'une colonne rectangulaire dont les faces soient parallèles aux plans directeurs.

Les limites des deux intégrations seront alors constantes et égales aux coordonnées a, a', b, b' des quatre sommets de la base. On aura donc

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} mxy\,dy = m\int_a^{a'} x\,dx \int_b^{b'} y\,dy \\
&= m\int_a^{a'} x\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_b^{b'} = \frac{m(b'^2 - b^2)}{2}\int_a^{a'} x\,dx \\
&= \frac{m(b'^2 - b^2)(a'^2 - a^2)}{4} \\
&= (a' - a)(b' - b)\,\frac{m(a' + a)(b' + b)}{4} \\
&= (a' - a)(b' - b)\,\frac{mab + mab' + ma'b + ma'b'}{4}.
\end{aligned}$$

Or $a' - a$ et $b' - b$ sont les côtés de la base; leur produit en mesure donc la surface B. Quant aux quatre termes du numérateur, ce sont, d'après l'équation de la surface, les arêtes h, h', h'', h''' de la colonne. On a par suite

$$V = B.\frac{h + h' + h'' + h'''}{4}.$$

Le volume du plan gauche est le produit de la base par la moyenne arithmétique des quatre arêtes.

246. *Volumes de révolution.* — Lorsque la surface est de révolution, on peut profiter de cette circonstance pour opérer plus simplement. On cherche la tranche finie qui est comprise entre deux parallèles arbitraires correspondant aux ordonnées z_1 et z_2. L'élément est un volume analogue, mais qu'on peut confondre avec un cylindre droit dont la hauteur serait dz et la base πx^2. On a ainsi

$$dV = \pi x^2\,dz.$$

Pour passer de l'élément au volume fini, on remplacera x en fonction de z d'après l'équation de la méridienne et on aura

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} x^2\, dz.$$

Exemple. — Cherchons le volume total du tore. Nous le considérerons comme la différence de deux tranches terminées par les nappes extérieure et intérieure. L'élément sera alors

$$\pi(x_2^2 - x_1^2)\, dz = \pi(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)\, dz.$$

Or la distance R du centre à l'axe est la moyenne entre x_2 et x_1; donc $x_2 + x_1 = 2\,R$. De plus $x_2 - x_1$ est la corde du cercle, de sorte que $(x_2 - x_1)\, dz$ représente l'élément dS de sa surface. Il vient ainsi

$$2\pi R . dS,$$

et en intégrant dans toute l'étendue du cercle

$$2\pi R . S = 2\pi^2 R r^2.$$

Le volume du tore est donc le produit de la surface du cercle générateur par la circonférence que décrit son centre.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

§ 1.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

247. *Intégration par séries.* — On appelle *équation différentielle du premier ordre* toute relation entre une variable, une fonction et sa dérivée

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Intégrer cette équation, c'est déterminer cette fonction inconnue y, ou au moins trouver une équation non résolue, mais de forme ordinaire, qui la relie à sa variable.

La seule méthode générale d'intégration consiste pour les équations comme pour les fonctions (198) dans l'emploi des séries.

Si nous développons, en effet, la fonction y d'après la formule de Maclaurin ([1]), il viendra en employant la notation du § 101

$$y = y_0 + x\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 + \frac{x^2}{1.2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 + \frac{x^3}{1.2.3}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_0 + \ldots,$$

([1]) Si l'application de la formule de Maclaurin rencontrait des difficultés, on se servirait de la formule de Taylor en faisant dans les coefficients $x = a$ au lieu de $x = 0$.

il suffit donc de trouver tous les coefficients de ce développement. Or, si on fait dans la proposée $x = 0$, elle fournira $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0$ en fonction de y_0. En différentiant, on introduit $\frac{d^2y}{dx^2}$, et en faisant $x = 0$, $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0$ qu'on déterminera ainsi en fonction de y_0 et $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0$, et, par suite, de y_0 seul. En différentiant encore, et faisant $x = 0$, on trouvera de même $\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_0$; et ainsi de suite. Toute la série sera alors déterminée à l'exception de la seule quantité y_0, dont rien au contraire n'assigne la valeur. Elle reste donc indéterminée et figure à l'état de *constante arbitraire* dans le résultat. Ainsi l'*intégrale générale* d'une équation du premier ordre contient une constante arbitraire sous la forme

$$F(x, y; C) = 0.$$

Si on attribue à cette constante des valeurs prises à volonté, on obtiendra autant d'*intégrales particulières*.

Exemple. — Pour montrer une application de cette méthode, je considérerai l'équation fort simple

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

En la différentiant un nombre quelconque de fois, elle montrerait que deux dérivées consécutives quelconques sont égales. Elles le sont donc toutes à y lui-même. Par suite, tous les coefficients de la série ont pour valeur y_0, et on a

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire (10, p. 84)

$$y = Ce^x,$$

résultat facile à vérifier.

248. *Séparation des variables.* — Si l'on ne connait pas la somme du développement auquel on se trouve conduit, la question ne peut être considérée comme complétement résolue. On a alors recours à d'autres méthodes qui sont d'une application plus ou moins restreinte. Leur principe général consiste dans la *séparation des variables*. On cherche à isoler dans chacun des membres tout ce qui se rapporte à chaque variable. L'équation prend par là la forme

$$X\,dx = Y\,dy,$$

X étant une fonction de x et Y une fonction de y. On en tire pour l'intégrale générale

$$\int X\,dx = \int Y\,dy + C,$$

car ces fonctions, ayant des différentielles égales, ne peuvent différer que par une constante (184).

Quand l'équation ne se prête pas immédiatement à la séparation, on peut parfois l'effectuer par un changement de variables. J'en vais montrer deux exemples doués d'une très-grande généralité.

249. Exemple I. — Considérons d'abord l'équation *homogène*, c'est-à-dire celle

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

dont les coefficients M et N peuvent être ramenés à ne dépendre que du rapport $\frac{y}{x}$. Si on pose

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = zx, \quad dy = z\,dx + x\,dz,$$

M et N deviendront fonctions de z seulement, et on aura

$$M\,dx + N(z\,dx + x\,dz) = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N}{M+Nz}dz.$$

Les variables sont actuellement séparées, puisque M et N ne renferment que z, et on a en intégrant

$$Lx = -\int \frac{N}{M+Nz}dz + LC;$$

d'où

$$x = Ce^{-\int \frac{N}{M+Nz}dz},$$

équation où il suffira après l'intégration de rendre à z sa valeur $\frac{y}{x}$.

250. Exemple II. — Considérons encore l'équation *linéaire*, c'est-à-dire celle où y et $\frac{dy}{dx}$ ne figurent qu'au premier degré, et sans se multiplier l'un l'autre. Sa forme la plus générale sera

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x.

Nous poserons

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

en nous réservant d'établir entre u et v telle relation que nous le jugerons convenable, puisque nous introduisons deux quantités pour tenir lieu d'une seule. En substituant,

il vient

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+\mathrm{P}uv=\mathrm{Q},$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}+\mathrm{P}v\right)+v\frac{du}{dx}=\mathrm{Q}.$$

Nous profiterons de la faculté dont il vient d'être question pour diviser cette équation en deux autres plus simples, en posant

$$\frac{dv}{dx}+\mathrm{P}v=0,$$

ce qui la réduit à

$$v\frac{du}{dx}=\mathrm{Q}.$$

Nous pouvons maintenant dans chacune d'elles séparer les variables.

La première donne, en effet,

$$\frac{dv}{v}=-\mathrm{P}\,dx,$$

$$lv=-\int \mathrm{P}\,dx+l\mathrm{K},$$

$$v=\mathrm{K}e^{-\int \mathrm{P}\,dx}.$$

La seconde devient alors

$$du=\frac{\mathrm{Q}}{v}\,dx=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{K}}e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,dx,$$

$$u=\frac{1}{\mathrm{K}}\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,dx+\mathrm{K}',$$

et, par suite,

$$y=uv=\mathrm{K}e^{-\int \mathrm{P}\,dx}\left\{\frac{1}{\mathrm{K}}\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,dx+\mathrm{K}'\right\}.$$

c'est-à-dire

$$y = e^{-\int P dx}\left\{\int Q e^{\int P dx} dx + C\right\}.$$

Dans toutes ces formules les constantes ont été mises en évidence, et, par suite, les intégrales doivent être dans chaque cas effectuées sans constante.

Si nous supposons, par exemple, les coefficients P et Q constants, on aura

$$\int P dx = Px,$$

$$\int Q e^{Px} dx = \frac{Q}{P} e^{Px};$$

et pour l'intégrale générale

$$y = e^{-Px}\left(\frac{Q}{P} e^{Px} + C\right) = \frac{Q}{P} + Ce^{-Px}.$$

§ II.

ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

251. *Intégration par séries.* — On appelle équation différentielle de l'ordre n toute relation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

entre une variable x, une fonction y et ses n premières dérivées, ou au moins la $n^{ième}$.

On peut encore développer la fonction inconnue par la formule de Maclaurin. Si, en effet, nous faisons $x = 0$ dans la proposée, elle déterminera $\left[\frac{d^ny}{dx^n}\right]_0$ en fonction de

$y_0, \left[\frac{dy}{dx}\right]_0, \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0, \ldots, \left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]_0$. En différentiant, on fera apparaître $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ et en faisant ensuite $x=0$, $\left[\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right]_0$ qui sera ainsi déterminé au moyen de toutes les précédentes, et, par suite, seulement des n premiers coefficients, puisque le $(n+1)^{ième}$ vient d'y être ramené lui-même; et ainsi de suite. On arrivera de cette manière à trouver tout le développement en fonction de ces n coefficients. Mais rien ne les détermine eux-mêmes et ils restent quelconques. On voit par là que l'intégrale générale d'une équation d'ordre n renferme n constantes arbitraires sous la forme

$$F(x, y; C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0.$$

En déterminant toutes ces constantes ou une partie seulement, on obtiendra des intégrales plus ou moins particulières.

Exemple. — Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

En la différentiant un nombre quelconque de fois, elle montrerait que les dérivées qui se suivent de deux en deux sont égales et de signes contraires. De là deux séries de termes qui ont des signes alternatifs, et pour valeurs les uns y_0 et les autres $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0$. La formule de Maclaurin devient ainsi

$$y = y_0\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right\} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_0\left\{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\},$$

c'est-à-dire (11 et 12, p. 85)

$$y = C\cos x + C'\sin x,$$

résultat facile à vérifier.

252. *Équations linéaires à coefficients constants.* — Lorsqu'on ne peut sommer les séries, la méthode précédente ne résout qu'imparfaitement la question, et il faut recourir aux procédés d'intégration proprement dits.

L'un des plus satisfaisants s'applique au cas des *équations linéaires à coefficients constants,* c'est-à-dire de celles où x ne figure pas explicitement et où y et ses dérivées n'entrent qu'au premier degré, et sans se multiplier. Le type le plus général de ces équations sera

$$A\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = B.$$

On peut, et il faut toujours commencer par faire disparaître le second membre. Il suffit pour cela de poser

$$y = z + \frac{B}{A_n}.$$

En substituant cette valeur, la transformée en z ne diffère que par l'absence du second membre

$$(98)\qquad A\frac{d^n z}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dz}{dx} + A_n z = 0.$$

C'est à cette classe d'équations que s'applique la méthode que je vais indiquer.

253. Elle repose essentiellement sur les deux principes suivants qui conviennent du reste à toutes les équations linéaires sans second membre, lors même que les coefficients sont des fonctions de x.

1°. Si Z est une solution, CZ en est une autre. En effet, toute dérivée de CZ étant le produit par C de celle de Z, le résultat de la substitution dans l'équation ne diffère pour Z et pour CZ que par le facteur commun C. Si donc il est nul pour la première valeur, il l'est aussi pour la seconde.

2°. Si Z' et Z'' sont deux solutions, Z' + Z'' en est une autre. En effet, toute dérivée de Z' + Z'' est la somme des dérivées semblables de Z' et de Z''. Le résultat de la substitution sera donc la somme de ceux qu'on obtient pour Z' et Z'' séparément, et si chacun d'eux est nul, il en sera de même de l'ensemble.

Il suit de ces deux principes que si on connaît n solutions distinctes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, on en aura encore une autre dans l'expression

$$z = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \ldots + C_n Z_n,$$

et celle-ci sera l'intégrale générale, puisqu'elle renferme n constantes arbitraires.

254. La question est donc ramenée à trouver n solutions particulières de l'équation. Pour en obtenir, nous essayerons la forme analytique

$$z = e^{mx},$$

dans laquelle m désigne une constante qui reste à notre disposition. Toute dérivée de cette exponentielle sera (44) son produit par la puissance semblable de m. L'exponentielle se trouvera donc en facteur dans tous les termes, et disparaîtra ainsi de l'équation. Il restera seulement

$$(99) \qquad A m^n + A_1 m^{n-1} + \ldots + A_{n-1} m + A_n = 0.$$

Il suffit par suite de prendre pour m une valeur capable d'annuler ce polynôme, c'est-à-dire une de ses racines. Or il en a précisément n que je désigne par $m_1, m_2, \ldots, m_n$. On

obtient donc à la fois les n solutions cherchées, et on a pour l'intégrale générale

(100) $$z = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}.$$

255. Si les racines sont imaginaires, on peut néanmoins conserver au résultat une forme réelle. En effet elles sont alors conjuguées deux à deux, de telle façon que si on trouve d'une part $a + b\sqrt{-1}$ on obtient en même temps la racine $a - b\sqrt{-1}$. On a donc pour la partie qui se rapporte à ce couple de racines

$$Ce^{(a+b\sqrt{-1})x} + C'e^{(a-b\sqrt{-1})x}$$
$$= e^{ax}\left\{Ce^{bx\sqrt{-1}} + C'e^{-bx\sqrt{-1}}\right\},$$

ou, d'après la formule d'Euler (13, p. 86),

$$e^{ax}\left\{C\left[\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx\right] + C'\left[\cos bx - \sqrt{-1}\sin bx\right]\right\}$$
$$= e^{ax}\left\{(C + C')\cos bx + \sqrt{-1}(C - C')\sin bx\right\},$$

et, en remplaçant les arbitraires C et C' par d'autres K et K',

(101) $$e^{ax}(K\cos bx + K'\sin bx).$$

256. Il se présente une difficulté plus réelle lorsque l'équation renferme des racines multiples. Plusieurs termes de l'équation (100) se réduisent alors en un seul, et cette formule, tout en restant une intégrale de la proposée, ne contient plus n constantes distinctes et ne fournit plus dès lors l'intégrale générale. On peut cependant la compléter de nouveau de la manière suivante.

Désignons par $f(m)$ le polynôme (99). On a vu que le résultat de la substitution de e^{mx} à la place de z dans l'é-

quation différentielle est, quel que soit m,

$$A\frac{d^n(e^{mx})}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}(e^{mx})}{dx^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{d(e^{mx})}{dx}+A_n e^{mx}$$
$$=e^{mx}.f(m).$$

Cette égalité ayant lieu identiquement pour toutes les valeurs de m, nous pouvons la différentier par rapport à ce paramètre (13). Or on aura pour un terme quelconque

$$\frac{d\left\{A_{n-k}\frac{d^k(e^{mx})}{dx^k}\right\}}{dm}=A_{n-k}\frac{d^{k+1}(e^{mx})}{dx^k\,dm}$$
$$=A_{n-k}\frac{d^k\left\{\frac{d(e^{mx})}{dm}\right\}}{dx^k}=A_{n-k}\frac{d^k(xe^{mx})}{dx^k},$$

et, par suite, pour l'ensemble,

$$A\frac{d^n(xe^{mx})}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}(xe^{mx})}{dx^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{d(xe^{mx})}{dx}+A_n xe^{mx}$$
$$=xe^{mx}f(m)+e^{mx}f'(m).$$

Supposons maintenant que m désigne une racine double de l'équation (99), elle annulera à la fois $f(m)$ et $f'(m)$, et, par suite, le second membre de cette dernière relation. On voit par là que le résultat de la substitution de xe^{mx} à la place de z dans l'équation (98) est égal à zéro, ou que xe^{mx} en est une solution particulière.

On reconnaîtrait de même que si m désigne une racine multiple d'ordre p; e^{mx}, xe^{mx}, x^2e^{mx}, ..., $x^{p-1}e^{mx}$ sont des solutions de l'équation; de sorte qu'on en aura encore une autre dans l'expression

$$Ce^{mx}+C'xe^{mx}+C''x^2e^{mx}+\ldots+C^{(p-1)}x^{p-1}e^{mx},$$

ou

$$e^{mx}\left\{C+C'x+C''x^2+\ldots+C^{(p-1)}x^{p-1}\right\},$$

Chaque racine d'ordre p introduit ainsi p constantes arbitraires, de sorte que le nombre total de ces dernières se trouve rétabli et qu'on obtient encore l'intégrale générale.

257. Exemple I. — Considérons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + qz = 0;$$

formons l'équation transformée

$$m^2 + pm + q = 0,$$

$$m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si la quantité subordonnée au radical est positive, on aura (100)

$$z = e^{-\frac{px}{2}} \left\{ Ce^{x\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} + C'e^{-x\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}} \right\}.$$

Si elle est négative, on changera son signe en multipliant le radical par $\sqrt{-1}$ et il viendra (101)

$$z = e^{-\frac{px}{2}} \left\{ C_1 \cos x\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} + C_2 \sin x\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right\}.$$

Si elle est nulle, les racines sont égales à $-\frac{p}{2}$, et on a (256)

$$z = e^{-\frac{px}{2}} \{C_1 + C_2 x\},$$

pour l'intégrale de l'équation particulière

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + \frac{p^2}{4}z = 0.$$

EXEMPLE II. — Soit l'équation binôme (18, p. 93)

$$\frac{d^n z}{dx^n} = z, \quad m^n = 1, \quad m = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

On aura pour l'intégrale générale (100)

$$z = Ce^x + \sum_1^{n-1}\left\{C_k e^{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)x}\right\}.$$

Si donc n est pair, il viendra (101)

$$z = Ce^x + C'e^{-x} + \sum_1^{\frac{n}{2}-1}\left\{e^{x\cos\frac{2k\pi}{n}}\left[K_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + K'_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\},$$

et si n est impair

$$z = Ce^x + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}\left\{e^{x\cos\frac{2k\pi}{n}}\left[K_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + K'_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\}.$$

EXEMPLE III. — Soit enfin l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + n\frac{dz}{dx} + z = 0.$$

La transformée sera

$$m^n + n.m^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}m^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}m^2 + n.m + 1 = 0,$$

ou

$$(m+1)^n = 0.$$

Toutes les racines étant égales à -1, on a pour l'intégrale générale (256)

$$z = e^{-x}\left\{C + C'x + C''x^2 + C'''x^3 + \ldots + C^{(n-1)}x^{n-1}\right\}.$$

§ III.

ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

258. *Intégration par séries.* — On appelle *équations simultanées du premier ordre* un système de n équations entre une variable x, n fonctions $y, z, \ldots, u$ de cette variable, et leurs premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$.

On peut encore trouver le développement de ces fonctions en série, en cherchant successivement tous les coefficients de la formule de Maclaurin appliquée à chacune d'elles. Si on fait pour cela $x = 0$ dans les n équations, elles fourniront les n valeurs de $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0, \left[\frac{dz}{dx}\right]_0, \ldots, \left[\frac{du}{dx}\right]_0$, en fonction de $y_0, z_0, \ldots, u_0$. En différentiant on fera apparaître $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^2u}{dx^2}$, et en faisant ensuite $x = 0$, $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0, \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_0, \ldots, \left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_0$. On pourra, d'après cela, déterminer ces quantités en fonction de $y_0, z_0, \ldots, u_0$ et des premières, qui l'ont été elles-mêmes en $y_0, z_0, \ldots, u_0$; et ainsi de suite. On connaîtra de cette manière tous les développements, à l'exception du premier terme qui restera arbitraire pour chacun d'eux.

On voit par là que le système des intégrales générales de n équations simultanées du premier ordre entre n fonctions renferme n constantes arbitraires. Si on en détermine à volonté un certain nombre, on aura des intégrales plus ou moins particulières.

Exemple. — Considérons le système très-simple

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = y.$$

Si on différentie et qu'on fasse $x = 0$, il viendra

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 = \left[\frac{dz}{dx}\right]_0 = y_0, \quad \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_0 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_0 = z_0.$$

En différentiant ensuite un nombre pair de fois, on reconnaîtrait que toutes les dérivées paires sont égales, pour chacune des fonctions, à la fonction elle-même. En différentiant au contraire un nombre impair de fois, on verrait que les dérivées impaires sont égales pour chacune des fonctions à l'autre. De là les deux développements

$$y = y_0\left[1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right]$$
$$+ z_0\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right],$$
$$z = z_0\left[1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right]$$
$$+ y_0\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right].$$

Il est facile d'y reconnaître les expressions suivantes

$$y = y_0\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + z_0\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right),$$
$$z = z_0\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + y_0\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right),$$

ou encore

$$y = \frac{y_0 + z_0}{2}e^x + \frac{y_0 - z_0}{2}e^{-x},$$
$$z = \frac{z_0 + y_0}{2}e^x + \frac{z_0 - y_0}{2}e^{-x},$$

et enfin simplement

$$y = Ce^x + C'e^{-x}, \quad z = Ce^x - C'e^{-x}.$$

259. On appelle *équations simultanées d'ordre supérieur*

un système de n relations établies entre une variable x, n fonctions $y, z, \ldots, u$ et un certain nombre de leurs dérivées, à savoir p pour y, q pour $z, \ldots, r$ pour u. De cette manière chaque équation peut renfermer

$$\begin{array}{l} x;\; y,\; \frac{dy}{dx},\; \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}},\; \frac{d^py}{dx^p}, \\ z,\; \frac{dz}{dx},\; \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}},\; \frac{d^qz}{dx^q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u,\; \frac{du}{dx},\; \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}},\; \frac{d^ru}{dx^r}, \end{array}$$

mais il n'est pas nécessaire que toutes ces quantités figurent dans chacune d'elles.

On peut toujours ramener un pareil système à être du premier ordre, en employant à la vérité un plus grand nombre de fonctions. Il suffit pour cela de poser

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y',\quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \quad \frac{dy_{p-2}}{dx} = y_{p-1}, \\ \frac{dz}{dx} = z',\quad \frac{dz'}{dx} = z'', \ldots, \quad \frac{dz_{q-2}}{dx} = z_{q-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du}{dx} = u',\quad \frac{du'}{dx} = u'', \ldots, \quad \frac{du_{r-2}}{dx} = u_{r-1}. \end{array}$$

Alors les équations ne dépendent plus des quantités précédentes, mais de

$$\begin{array}{l} x;\; y,\; y',\; y'', \ldots, y_{p-1},\; \frac{dy_{p-1}}{dx}, \\ z,\; z',\; z'', \ldots, z_{q-1},\; \frac{dz_{q-1}}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u,\; u',\; u'', \ldots, u_{r-1},\; \frac{du_{r-1}}{dx}. \end{array}$$

Elles sont évidemment du premier ordre, ainsi que celles que nous leur avons adjointes.

Or nous avons introduit $p-1$ fonctions et autant d'équations à l'occasion de y, $q-1$ pour $z, \ldots, r-1$ pour u, c'est-à-dire en tout $p+q+\ldots+r-n$. En leur adjoignant les n proposées, on a en tout $p+q+\ldots+r$ fonctions et équations. Un pareil système renferme dans ses intégrales générales $p+q+\ldots+r$ constantes. Mais il est équivalent au proposé. Donc un système quelconque d'équations simultanées contient dans ses intégrales générales un nombre de constantes arbitraires égal à la somme des ordres de différentiation les plus élevés de ses diverses fonctions.

On remarquera que les formules que nous avons introduites sont toujours les mêmes et aussi simples que possible. Elles sont évidemment linéaires et à coefficients constants, de sorte que si les équations proposées sont aussi de cette forme, il en sera encore de même du système transformé. Il existe pour l'intégration de semblables équations une méthode générale que je vais faire connaître.

260. *Équations simultanées linéaires à coefficients constants.* — On peut toujours, pour plus de simplicité, supposer les équations résolues par rapport aux dérivées sous la forme

$$\frac{dy_1}{dx} = A'_1 y_1 + A'_2 y_2 + A'_3 y_3 + \ldots + A'_n y_n + B',$$

$$\frac{dy_2}{dx} = A''_1 y_1 + A''_2 y_2 + A''_3 y_3 + \ldots + A''_n y_n + B'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = A^{(n)}_1 y_1 + A^{(n)}_2 y_2 + A^{(n)}_3 y_3 + \ldots + A^{(n)}_n y_n + B^{(n)},$$

x étant la variable et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n fonctions inconnues.

Nous pouvons d'abord faire disparaître les termes constants. Il suffit pour cela de poser

$$y_1 = z_1 + k_1, \quad y_2 = z_2 + k_2, \quad \ldots, \quad y_n = z_n + k_n,$$

en déterminant $k_1, k_2, \ldots, k_n$ par les relations du premier degré

$$A'_1 k_1 + A'_2 k_2 + A'_3 k_3 + \ldots + A'_n k_n + B' = 0,$$

$$A''_1 k_1 + A''_2 k_2 + A''_3 k_3 + \ldots + A''_n k_n + B'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(n)}_1 k_1 + A^{(n)}_2 k_2 + A^{(n)}_3 k_3 + \ldots + A^{(n)}_n k_n + B^{(n)} = 0.$$

Les équations se réduiront alors à

$$(102)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= A'_1 z_1 + A'_2 z_2 + A'_3 z_3 + \ldots + A'_n z_n, \\ \frac{dz_2}{dx} &= A''_1 z_1 + A''_2 z_2 + A''_3 z_3 + \ldots + A''_n z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_n}{dx} &= A^{(n)}_1 z_1 + A^{(n)}_2 z_2 + A^{(n)}_3 z_3 + \ldots + A^{(n)}_n z_n, \end{aligned} \right.$$

et il suffit d'intégrer ce nouveau système.

Pour cela nous ferons

$$z_1 = h_1 e^{mx}, \quad z_2 = h_2 e^{mx}, \quad \ldots, \quad z_n = h_n e^{mx}.$$

Après la substitution l'exponentielle subsistera dans tous les termes et pourra être supprimée. Il restera

$$mh_1 = A'_1 h_1 + A'_2 h_2 + A'_3 h_3 + \ldots + A'_n h_n,$$

$$mh_2 = A''_1 h_1 + A''_2 h_2 + A''_3 h_3 + \ldots + A''_n h_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$mh_n = A^{(n)}_1 h_1 + A^{(n)}_2 h_2 + A^{(n)}_3 h_3 + \ldots + A^{(n)}_n h_n.$$

Il suffira donc, pour que les expressions précédentes soient des solutions particulières, que leurs constantes satisfassent à ces conditions.

Si nous faisons pour un instant abstraction de m, les équations deviendront du premier degré par rapport à $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$, sous la forme

$$(103)\begin{cases}(A'_1 - m)h_1 + A'_2\, h_2 + A'_3\, h_3 + \ldots + A'_n\, h_n = 0,\\ A''_1\, h_1 + (A''_2 - m)h_2 + A''_3\, h_3 + \ldots + A''_n\, h_n = 0,\\ A'''_1\, h_1 + A'''_2\, h_2 + (A'''_3 - m)h_3 + \ldots + A'''_n\, h_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A^{(n)}_1\, h_1 + A^{(n)}_2\, h_2 + A^{(n)}_3\, h_3 + \ldots + (A^{(n)}_n - m)h_n = 0.\end{cases}$$

Elles sont au nombre de n entre les n inconnues $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$. Mais puisque les seconds membres sont nuls, elles n'en peuvent déterminer que les rapports. Elles doivent donc donner pour les inconnues elles-mêmes des valeurs indéterminées, et pour cela il faut que le dénominateur commun soit nul.

On sait former ce dénominateur et on obtient par là la condition que doit remplir la quantité m qui y figure. Or l'un des termes de ce polynôme renfermera le produit des n coefficients

$$A'_1 - m, \quad A''_2 - m, \quad A'''_3 - m, \quad \ldots, \quad A^{(n)}_n - m,$$

c'est-à-dire que l'équation en m sera du $n^{ième}$ degré, car aucun autre terme ne renfermant m^n, cette puissance ne pourra disparaître. On obtiendra donc pour cette inconnue n valeurs [1]

$$m', \quad m'', \quad m''', \quad \ldots, \quad m^{(n)}.$$

---

[1] Je ne m'arrête pas au cas des racines égales.

Les équations (103) permettent alors d'exprimer, et cela d'une seule manière, les coefficients $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ou plutôt leurs rapports, en fonction de m. On aura ainsi pour chaque valeur de m un système de solutions que nous représenterons de la manière suivante, en mettant en évidence un coefficient indéterminé,

$$\begin{array}{lllll} C' h'_1, & C' h'_2, & C' h'_3, & \ldots, & C' h'_n \quad \text{pour } m', \\ C'' h''_1, & C'' h''_2, & C'' h''_3, & \ldots, & C'' h''_n \quad \text{pour } m'', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C^{(n)} h_1^{(n)}, & C^{(n)} h_2^{(n)}, & C^{(n)} h_3^{(n)}, & \ldots, & C^{(n)} h_n^{(n)} \quad \text{pour } m^{(n)}. \end{array}$$

Il résulte de là les systèmes suivants d'intégrales particulières des équations (102)

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = \\ z_2 = \\ z_3 = \\ \ldots \\ z_n = \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} C' h'_1 e^{m'x} \\ C' h'_2 e^{m'x} \\ C' h'_3 e^{m'x} \\ \ldots \\ C' h'_n e^{m'x} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} C'' h''_1 e^{m''x} \\ C'' h''_2 e^{m''x} \\ C'' h''_3 e^{m''x} \\ \ldots \\ C'' h''_n e^{m''x} \end{array}\right\}\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{array}\left\{\begin{array}{l} C^{(n)} h_1^{(n)} e^{m^{(n)}x} \\ C^{(n)} h_2^{(n)} e^{m^{(n)}x} \\ C^{(n)} h_3^{(n)} e^{m^{(n)}x} \\ \ldots \\ C^{(n)} h_n^{(n)} e^{m^{(n)}x} \end{array}\right.$$

On en déduit, comme au § 253, les solutions

$$z_1 = C' h'_1 e^{m'x} + C'' h''_1 e^{m''x} \ldots + C^{(n)} h_1^{(n)} e^{m^{(n)}x},$$

$$z_2 = C' h'_2 e^{m'x} + C'' h''_2 e^{m''x} \ldots + C^{(n)} h_2^{(n)} e^{m^{(n)}x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n = C' h'_n e^{m'x} + C'' h''_n e^{m''x} \ldots + C^{(n)} h_n^{(n)} e^{m^{(n)}x}.$$

Or elles contiennent n constantes arbitraires, ce sont donc les intégrales générales des équations (102).

261. Exemple. — Considérons le système

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1 + z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_1 - z_2.$$

Formons les équations transformées

$$mh_1 = h_1 + h_2, \quad mh_2 = h_1 - h_2,$$

ou

$$(1 - m)h_1 + h_2 = 0, \quad h_1 - (1 + m)h_2 = 0.$$

La réduite en m sera

$$-(1 - m)(1 + m) - 1 = 0,$$

$$m^2 - 2 = 0, \quad m = \pm\sqrt{2},$$

d'où

$$m' = \sqrt{2}, \quad m'' = -\sqrt{2}.$$

On a ensuite

$$\frac{h_2}{h_1} = m - 1,$$

ce qui permet de prendre

$$h_1 = 1, \quad h_2 = m - 1,$$

et par suite

$$h'_1 = 1, \quad h'_2 = \sqrt{2} - 1,$$

$$h''_1 = 1, \quad h''_2 = -\sqrt{2} - 1.$$

On obtient ainsi les intégrales générales

$$z_1 = Ce^{x\sqrt{2}} + C'e^{-x\sqrt{2}},$$

$$z_2 = (\sqrt{2} - 1)Ce^{x\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)C'e^{-x\sqrt{2}}.$$

CHAPITRE VI.

CALCUL INTÉGRAL DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

§ I.

INTÉGRATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

262. *Fonctions de deux variables.* — Nous savons trouver la différentielle totale de toute fonction u de deux variables indépendantes x et y

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

La question inverse consiste à déterminer u, connaissant sa différentielle

$$du = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy,$$

dans laquelle X et Y désignent des expressions connues qui dépendent toutes les deux de x et de y.

La solution n'est possible qu'autant que les deux coefficients remplissent une condition. On doit avoir en effet pour identifier les deux valeurs de du

$$\mathrm{X} = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad \mathrm{Y} = \left(\frac{du}{dy}\right).$$

On en déduit

$$\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}\right) = \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right),$$

car ces deux expressions reviennent à $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$. Si cette condition n'est pas remplie, il est inutile de chercher la fonction u, qui alors n'existe pas. Si elle a lieu, on peut toujours ramener le problème à l'intégration ordinaire.

En effet, puisque X est la dérivée de u prise par rapport à x, on a, en donnant pour plus de clarté à l'intégrale des limites, du reste quelconques,

$$u = \int_{x_0}^{x} X\,dx + v.$$

Dans cette expression v désigne une arbitraire. Ce n'est pas nécessairement une constante, et elle peut dépendre de y d'une manière quelconque, car elle n'en aura pas moins par rapport à x une dérivée partielle nulle. Pour déterminer v nous avons encore la seconde condition, à savoir que la dérivée de u relative à y soit Y. On a

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} X\,dx + \frac{dv}{dy},$$

ou, en différentiant sous le signe d'intégration, puisque les limites sont indépendantes de y (214),

$$Y - \frac{dv}{dy} = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{dX}{dy}\right)dx = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{dY}{dx}\right)dx = [Y]_{x_0}^{x} = Y - Y_0,$$

en désignant par Y_0 le résultat de la substitution de x_0 à la place de x dans Y. On tire de là

$$\frac{dv}{dy} = Y_0,$$

$$v = \int_{y_0}^{y} Y_0\,dy + C,$$

en prenant encore des limites quelconques, et par suite

(104). $$u = \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y_0\,dy + C.$$

263. Exemple. — Considérons l'expression

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{dx}\right) = -\left(\frac{d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{dy}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

étant identiquement remplie, on a (104) et (82, p. 227),

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{x_0^2+y^2}\,dy + C$$

$$= \left[-\text{arc tang}\,\frac{x}{y}\right]_{x_0}^{x} + \left[\text{arc tang}\,\frac{y}{x_0}\right]_{y_0}^{y} + C$$

$$= -\text{arc tang}\,\frac{x}{y} + \text{arc tang}\,\frac{x_0}{y} + \text{arc tang}\,\frac{y}{x_0} - \text{arc tang}\,\frac{y_0}{x_0} + C.$$

Or le second et le troisième terme désignent des arcs dont les tangentes ont pour produit l'unité, ils sont donc complémentaires et leur somme $\frac{\pi}{2}$ peut être comprise ainsi que le quatrième terme dans la constante arbitraire, ce qui donne simplement

$$u = C' - \text{arc tang}\,\frac{x}{y}.$$

264. *Fonctions de trois variables.* — Supposons main-

tenant une fonction de trois variables indépendantes x, y, z,

$$du = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Cette expression représentant la différentielle totale

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz,$$

on doit avoir, pour que le problème admette une solution,

$$X = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad Y = \left(\frac{du}{dy}\right), \quad Z = \left(\frac{du}{dz}\right),$$

d'où l'on déduit identiquement

$$(105) \quad \left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right), \quad \left(\frac{dY}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dy}\right), \quad \left(\frac{dZ}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dz}\right).$$

Si ces conditions sont remplies, on peut encore ramener la question au calcul intégral ordinaire.

En effet, puisque la dérivée de u relative à x est X, on a

$$u = \int_{x_0}^{x} X\,dx + v,$$

mais v peut dépendre de y et z d'une manière quelconque sans que sa dérivée relative à x cesse d'être nulle. Pour déterminer v, nous avons les deux autres conditions

$$Y = \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} X\,dx + \left(\frac{dv}{dy}\right),$$

$$Z = \left(\frac{du}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\int_{x_0}^{x} X\,dx + \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

et, par suite,

$$Y-\left(\frac{dv}{dy}\right)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dX}{dy}\right)dx=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dY}{dx}\right)dx=[Y]_{x_0}^{x}=Y-Y_0,$$

$$Z-\left(\frac{dv}{dz}\right)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dX}{dz}\right)dx=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dZ}{dx}\right)dx=[Z]_{x_0}^{x}=Z-Z_0;$$

en désignant par Y_0 et Z_0 les résultats de la substitution de x_0 à la place de x dans Y et Z.

On tire de là

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)=Y_0,\quad \left(\frac{dv}{dz}\right)=Z_0,$$

et, par suite,

$$dv=\left(\frac{dv}{dy}\right)dy+\left(\frac{dv}{dz}\right)dz=Y_0\,dy+Z_0\,dz,$$

formule certainement intégrable (262), puisque nous supposons remplie la seconde condition (105). On aura ainsi, d'après la formule (104),

$$v=\int_{y_0}^{y}Y_0\,dy+\int_{z_0}^{z}Z_{00}\,dz+C,$$

en désignant par Z_{00} le résultat de la substitution de y_0 à la place de y dans Z_0 ou de x_0 et y_0 à la place de x et y dans Z. En reportant cette valeur dans celle de u, il viendra enfin

$$u=\int_{x_0}^{x}X\,dx+\int_{y_0}^{y}Y_0\,dy+\int_{z_0}^{z}Z_{00}\,dz+C.$$

265. Exemple. — Considérons l'expression

$$du=\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz.$$

Les conditions d'intégrabilité sont évidemment remplies. On a donc

$$u = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{z} - \frac{x_0}{y^2}\right)dy + \int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{y_0}{z^2}\right)dz + C$$

$$= \left[\frac{x}{y} + \frac{z}{x}\right]_{x_0}^{x} + \left[\frac{y}{z} + \frac{x_0}{y}\right]_{y_0}^{y} + \left[\frac{z}{x_0} + \frac{y_0}{z}\right]_{z_0}^{z} + C$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{x}\right) - \left(\frac{x_0}{y} + \frac{z}{x_0}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{x_0}{y}\right) - \left(\frac{y_0}{z} + \frac{x_0}{y_0}\right)$$

$$+ \left(\frac{z}{x_0} + \frac{y_0}{z}\right) - \left(\frac{z_0}{x_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + C,$$

ou, en effectuant toutes les réductions,

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C'.$$

266. *Fonctions de plusieurs variables.* — De même que nous avons ramené le cas de trois variables à celui de deux par le moyen d'une fonction v qu'il faut ajouter à $\int_{x_0}^{x} X\,dx$ pour obtenir u; de même on passera d'un nombre quelconque de variables à une de plus.

On aura pour une fonction u

$$du = X dx + Y dy + Z dz + T dt + \ldots,$$

de n variables $x, y, z, t, \ldots$, des conditions de la forme

$$\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right),$$

en envisageant deux termes quelconques de la formule

$$\ldots + P\,dp + Q\,dq + \ldots$$

Leur nombre étant évidemment celui des combinaisons de n quantités prises deux à deux, sera égal à $\frac{n(n-1)}{2}$ et croîtra rapidement avec celui des variables.

Lorsqu'elles seront toutes remplies sans exception, on aura la formule

$$u = C + \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y_0\,dy + \int_{z_0}^{z} Z_{00}\,dz + \int_{t_0}^{t} T_{000}\,dt + \dots$$

dans laquelle $Y_0, Z_{00}, T_{000}, \dots$ désignent le résultat de la substitution dans Y, dans Z, dans T,... de x_0, de x_0, y_0, de $x_0, y_0, z_0, \dots$ à la place de x, de x, y, de x, y, z, et ainsi de suite.

Il est très-utile de disposer dans chaque cas particulier des limites $x_0, y_0, z_0, t_0, \dots$ pour simplifier autant que possible les calculs. On en va voir un exemple.

267. Exemple. — Soit l'expression

$$du = (y + z + t)\,dx + (x + z + t)\,dy + (x + y + t)\,dz + (x + y + z)\,dt.$$

Les six conditions d'intégrabilité se réduisent toutes à $1 = 1$. Si nous prenons partout pour limite inférieure zéro, la quatrième intégrale disparaîtra complétement et les autres se réduiront ainsi

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x (y + z + t)\,dx + \int_0^y (z + t)\,dy + \int_0^z t\,dz + C \\ &= [(y + z + t)x]_0^x + [(z + t)y]_0^y + [tz]_0^z + C \\ &= (y + z + t)x + (z + t)y + tz + C, \end{aligned}$$

ou sous une forme symétrique

$$2u = x(y + z + t) + y(x + z + t) + z(x + y + t) + t(x + y + z) + C'.$$

Ce résultat eût exigé des calculs beaucoup plus longs, si on avait employé des limites quelconques.

§ II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

268. La question que nous venons de résoudre consiste dans la détermination d'une fonction u de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ lorsque toutes ses dérivées partielles $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right), \ldots$ sont immédiatement données. Un problème plus difficile consiste dans la recherche d'une fonction d'après une condition quelconque donnée entre elle et ses dérivées partielles. Une pareille relation est appelée *équation différentielle partielle*. On en a vu des exemples dans les équations collectives de familles de surfaces (181).

L'arbitraire que comporte la détermination d'une fonction d'après une équation différentielle partielle est beaucoup plus large qu'avec les équations différentielles ordinaires. Au lieu de constantes arbitraires, l'intégrale générale renferme des *fonctions arbitraires*. On peut reconnaître en effet ce caractère dans les équations finies des familles de surfaces (66) et (67), qui sont équivalentes à leurs équations différentielles partielles (68) et (69), et en constituent par suite les intégrales générales.

Une équation différentielle partielle est dite *linéaire* lorsque les dérivées partielles n'y figurent qu'au premier degré et sans se multiplier l'une l'autre. Il n'est pas nécessaire, comme pour les équations différentielles ordinaires, que la fonction elle-même n'y paraisse qu'au premier degré et sans multiplier aucune de ses dérivées. Elle peut figurer d'une manière quelconque dans les différents termes.

Il existe pour l'intégration des équations linéaires du premier ordre à coefficients quelconques une méthode générale due à Jacobi, que je vais d'abord énoncer. Je démontrerai ensuite à posteriori l'exactitude du résultat.

269. Considérons l'équation différentielle partielle

$$(106)\qquad X\left(\frac{du}{dx}\right)+Y\left(\frac{du}{dy}\right)+Z\left(\frac{du}{dz}\right)+\ldots=U,$$

dans laquelle u désigne une fonction inconnue des n variables indépendantes x, y, z,...; et X, Y, Z,..., U des expressions connues formées avec toutes ces quantités indistinctement.

On change complétement le point de vue, et on envisage pour un instant $x, y, z,\ldots$ comme des fonctions de la seule variable u déterminées par ce système d'équations simultanées

$$(107)\qquad \frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\ldots=\frac{du}{U}.$$

Les n intégrales peuvent toujours être supposées résolues par rapport à leurs constantes arbitraires sous la forme

$$(108)\qquad f_1=C_1,\quad f_2=C_2,\quad \ldots,\quad f_n=C_n,$$

le type général de ces équations étant le suivant

$$f_k(x, y, z,\ldots; u)=C_k.$$

On pose alors la formule

$$(109)\qquad \varphi(f_1, f_2,\ldots, f_n)=0,$$

dans laquelle φ désigne une fonction arbitraire dont la nature doit rester complétement indéterminée. Si à ce moment on revient aux conditions de la question en considé-

rant u comme une fonction des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, la formule (109) fournit l'intégrale générale de l'équation proposée (106), comme je vais le faire voir.

270. Cette relation peut être considérée, dans la nouvelle manière de voir, comme une conséquence des équations simultanées (107). Car les expressions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ devant, d'après (108), conserver des valeurs invariables, il en sera de même de toute fonction φ de ces quantités. Quant à cette valeur constante, il n'est pas besoin de la spécifier, et on peut en la faisant passer dans le premier membre, et la confondant dans la fonction arbitraire φ, prendre, comme nous l'avons fait, zéro pour second membre. Si donc la formule (109) est une conséquence du système (107), toute relation qu'on obtiendra en les combinant ensemble devra avoir lieu *identiquement* entre les lettres qui y figurent. Or on peut faire cette combinaison de la manière suivante.

Différentions l'équation (109) en la considérant toujours comme composée avec $x, y, z, \ldots$, fonctions de u. On aura (5, p. 33)

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{dx}{du} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{du} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dz}{du} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire d'après (107)

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{X}{U} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{Y}{U} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{Z}{U} + \ldots = 0,$$

ou encore, en multipliant par U et divisant par $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$,

$$(110)\qquad U + X\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)} + Y\frac{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)} + Z\frac{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)} + \ldots = 0.$$

Actuellement reprenons l'équation (109), et considé-

rons-y inversement u comme une fonction de $x, y, z,\ldots$ On en tire, en différentiant successivement par rapport à chaque variable indépendante,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=0,\quad \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}=-\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)=0,\quad \frac{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}=-\left(\frac{du}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)=0,\quad \frac{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}=-\left(\frac{du}{dz}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ce système est équivalent à l'équation (109), prise au véritable point de vue. Mais on peut, sans lui faire perdre ce caractère, le combiner avec la formule (110) qui, comme j'ai eu soin d'y insister, n'est qu'une identité. Cette substitution donne

$$\mathrm{U}-\mathrm{X}\left(\frac{du}{dx}\right)-\mathrm{Y}\left(\frac{du}{dy}\right)-\mathrm{Z}\left(\frac{du}{dz}\right)-\ldots=0,$$

et sous cette nouvelle forme il est facile de reconnaître la proposée (106).

L'équation différentielle partielle et la formule (109) étant équivalentes, quand on considère dans cette dernière u comme une fonction de $x, y, z,\ldots$, il s'ensuit qu'elle est bien l'intégrale cherchée.

271. Exemple I. — Reprenons l'équation différentielle

partielle des cylindres (68)

$$m\left(\frac{dz}{dx}\right)+n\left(\frac{dz}{dy}\right)=1,$$

dans laquelle z est la fonction inconnue de x et y. Nous posons les équations simultanées

$$\frac{dx}{m}=\frac{dy}{n}=\frac{dz}{1},$$

ou en séparant

$$dx=mdz,\quad dy=ndz,$$

intégrant

$$x=mz+C,\quad y=nz+C',$$

résolvant par rapport aux constantes

$$x-mz=C,\quad y-nz=C',$$

et établissant entre elles une relation arbitraire

$$\varphi(x-mz,\quad y-nz)=0.$$

Il suffit de supposer cette formule résolue par rapport à l'une des deux quantités qu'elle renferme pour retrouver l'équation des cylindres sous sa première forme (66).

Exemple II. — Considérons de même l'équation différentielle partielle des cônes (69)

$$(x-\alpha)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y-\beta)\left(\frac{dz}{dy}\right)=z-\gamma.$$

Nous poserons les équations simultanées

$$\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{dy}{y-\beta}=\frac{dz}{z-\gamma}.$$

Elles ont pour intégrales

$$L(x-\alpha) = L(z-\gamma) + LC,$$
$$L(y-\beta) = L(z-\gamma) + LC',$$

et, en résolvant par rapport aux constantes,

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = C, \quad \frac{y-\beta}{z-\gamma} = C';$$

d'où l'intégrale générale

$$\varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = 0,$$

où l'on reconnaît de même l'équation finie des cônes (67).

272. Il peut arriver que l'équation soit sans second membre, ou que $U = 0$. Alors l'un des membres des équations simultanées est $\frac{du}{0}$, et comme les autres ne sont pas infinis, il faut nécessairement poser

$$du = 0, \quad u = C.$$

Ainsi l'une des expressions entre lesquelles on a à établir une relation arbitraire est u lui-même, les $n-1$ autres sont déterminées par les n autres membres qui ne présentent plus de difficulté.

Exemple. — Considérons cette équation fort simple qui a été rencontrée par Poisson dans l'étude de la chaleur latente des gaz

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + my\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Le système simultané se réduit alors à l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my},$$

d'où

$$Lx = \frac{1}{m} Ly + \frac{1}{m} LC,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^m}{y} = C.$$

On obtient, par suite, l'intégrale générale

$$\varphi\left(\frac{x^m}{y}, z\right) = 0.$$

EXERCICES.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉNONCÉS.

Différentiation des fonctions de fonctions.

1. $y = \cos\left[e^{\cos(e^x)}\right]$.

2. $y = \sqrt{L(\sin 2x)}$.

3. $y = e^{\sin L\sqrt{m+x^2}}$.

4. $y = \sin^m\left(e^{u + L\cos x}\right)$.

5. $y = \sqrt{m + (\log \sin 3x)^3}$.

6. $y = \left(L \sin \sqrt[3]{m^2}\right)^2$.

Différentiation des fonctions composées.

7. $y = \left\{x^5 - 3\sqrt[5]{x^7} + \frac{6}{x^{11}}\right\}\left\{3(x-2)^5 + \sqrt[3]{x^8 + \frac{3}{x^3}}\right\}$.

8. $y = \left[\sin^2(x^m) + \cos\left(\sqrt[m]{x}\right)\right] \operatorname{tang} mx$.

9. $y = \sin x . \cos x . \operatorname{arc} \sin x + \frac{e^x}{m + x}$.

10. $y = \sin\left(m^7 . \operatorname{tang} x + L \operatorname{arc} \sin x\right)$.

11. $y = \text{tang}\left(x^m \sqrt{Lx}\right)$.

12. $y = x^{\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)}$.

Différentiation des fonctions implicites.

13. $x^m + y^m - mxy = n$.

14. $x \sin y - y \sin x = m$.

15. $x^{y^x} = y^{x^y}$.

16. $\sin x + e^y + Lz = m$,

$$\sqrt{x} + \arcsin y + \frac{1}{z} = n.$$

Différentiation des fonctions de plusieurs variables.

17. $u = \sin(xyz) \cdot \cos(x + y + z)$.

18. $u = x^{y^2}$.

19. $x^5 + y^5 + u^5 + xyu - \frac{u}{xy} = 0$.

20. $u + Lv = e^x + y^2$,

$\arcsin u + \text{tang}\, v = \sqrt{x} + \sin y$.

Différentiation des divers ordres.

21. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $y = \sin^2 x$..

22. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $y = e^x \sin x$ et $z = e^x \cos x$.

23. Tirer dy et d^2y de l'équation

$$x^m + y^m = 1.$$

24. Calculer les différentielles successives de

$$u = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L.$$

25. Calculer du et d^2u sans résoudre l'équation

$$u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Changement de variables.

26. Prendre y pour variable indépendante dans l'équation

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + mxy \left[\frac{dy}{dx}\right]^3 - \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0.$$

27. Traiter de même l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m\frac{x}{y^2}\left[\frac{dy}{dx}\right]^3 + n\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0.$$

28. Trouver en partant de (20, Ex. VI) la dérivée de

$$y = \text{arc}\sin e^x.$$

29. Traiter de même d'après (20, Ex. VII)

$$y = LLLx.$$

30. Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ d'après les formules de transformation des coordonnées rectangulaires

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

31. Transformer d'après cela l'expression

$$\frac{\left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Séries.

32. Développer $\sin^2 x$ d'après le problème (21).

33. Développer $e^x \sin x$ et $e^x \cos x$ d'après le problème (22).

34. Développer $x \operatorname{arc\,tang} x - L\sqrt{1+x^2}$.

35. Traiter $x L x$ par la formule de Taylor en prenant la constante égale à l'unité.

Maxima.

36. $3x^5 - 25x^3 + 60x - 38$.

37. $\dfrac{x^n}{e^x}$.

38. $4x^5 - 25x^4 + 60x^3 - 70x^2 + 40x + 1$.

39. $f(x) + f\left(\dfrac{m}{x}\right)$.

40. Maximum de y d'après l'équation

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

41. Un voyageur se trouve dans une voiture animée d'une vitesse V suivant une droite; il veut se rendre en un point situé en dehors, mais il ne pourra plus s'avancer qu'avec la vitesse v quand il aura mis pied à terre. On demande en quel endroit il doit le faire pour arriver le plus tôt possible.

On prendra pour inconnue l'angle des deux directions parcourues.

42. $u = (x-m)^4 + (y-n)^4 + (x-m)^2(y-n)^2 + m^2n^2$.

43. Maximum de u sans résoudre l'équation

$$u^2 + u = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3) + 2.$$

44. Maximum de u sans faire l'élimination de

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \quad xyz = m.$$

Indétermination.

45. $\left[\dfrac{x^3 + \operatorname{tang}^2 x}{x^2 + \sin^2 x}\right]_0 = \dfrac{0}{0}$.

46. $\left[\dfrac{e^x - L(x+e)}{\sin x \cos x + x^3}\right]_0 = \dfrac{0}{0}$.

47. $\left[\dfrac{x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 28x^2 + 17x - 4}{x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 + 9x - 2}\right]_1 = \dfrac{0}{0}$.

48. $\left[\dfrac{Lx}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right]_0 = \dfrac{\infty}{\infty}$.

49. $\left[\dfrac{L(x-1)}{\operatorname{tang} \dfrac{\pi x}{2}}\right]_1 = \dfrac{\infty}{\infty}$.

50. $[\sin x . Lx]_0 = 0.\infty$.

51. $\left[\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{coséc} x\right]_0 = \infty - \infty$.

52. $[\sin x^{\operatorname{tang} x}]_0 = 0^0$.

53. $\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}\right]_0 = \infty^0$.

54. $\left[x^{\frac{1}{x-1}}\right]_1 = 1^{\infty}$.

Décomposition des fractions rationnelles.

55. $\dfrac{10x^3 + 3x^2 - 19x - 6}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

56. $\dfrac{2x^3 + 25x^2 - 25x - 8}{x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x}$.

57. $\dfrac{4x^4 - 27x^3 + 59x^2 - 48x + 10}{x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4}$.

Pour résoudre les dénominateurs, on essayera les racines $x = \pm 1$.

Tangentes.

58. Équations de la tangente et de la normale des coniques

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

59. Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale des coniques à centre

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2.$$

60. De même pour les trois coniques rapportées au sommet

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

61. Points d'inflexion de la courbe

$$y = 3x^6 - 30x^5 + 110x^4 - 180x^3 + mx + n.$$

62. Points singuliers des courbes suivantes

$$(x-m)^2 - (y-n)^3 + (y-n)^4 = 0.$$

63. $(x-m)^3 = (y-n)^2.$

64. $x^4 - xy(x+y) + y^2 = 0.$

65. $(x-m)^2 = (y-n)^3.$

66. $y\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) - x = 0.$

67. $y\,Lx = 1.$

68. $y = x\sqrt{x-m}.$

69. Tangente aux coniques rapportées au foyer

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

70. Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale de la spirale logarithmique

$$r = me^{n\theta}.$$

Asymptotes.

71. $y + ax + b + ce^{-x} = 0.$

72. $xy + px^2 + qy + rx + s = 0.$

73. $xy^2 + Ax^2y + Bx^3 + Cy^2 + Dxy + Ex^2 + Fy + Gx + H = 0.$

74. $xy^4 - 2x^3y^2 + x^5 - 4x^3 + px^2 + qx + r = 0.$

75. $r^n \sin n\theta = 1.$

Courbure.

76. Coniques à centre $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$.

77. Trouver les points de plus grande et de moindre courbure d'une ligne quelconque.

78. Appliquer aux coniques à centre $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$.

79. Rayon de courbure des spirales sinusoïdes $r^n = \sin n\theta$.

Enveloppes et développées.

80. Trouver la courbe de sûreté, ou l'enveloppe des paraboles de tir représentées par l'équation

$$Y = aX - \frac{X^2}{4H}(a^2 + 1).$$

81. Enveloppe d'une droite de longueur constante l qui se meut entre les côtés d'un angle droit.

82. Trouver en coordonnées polaires l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt un autre cercle.

83. Développées des coniques à centre $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$.

Courbes gauches.

84. Trouver les équations, la tangente, le plan normal, le plan osculateur et le rayon de courbure de la ligne qu'on obtient en enroulant sur un cylindre de révolution un plan dans lequel on a tracé un cercle.

On prendra le rayon du cylindre pour unité, celui du cercle égal à r; on disposera les axes comme sur la *fig.* 17 (p. 210), et on placera le centre du cercle sur l'axe des z.

On cherchera dans les mêmes conditions les équations et le rayon de courbure de la transformée d'une ligne plane quelconque

$$x = f(y).$$

85. Trouver le centre α, β, γ et le rayon r de la sphère osculatrice d'une courbe quelconque en un point x, y, z; c'est-à-dire de celle qui a avec cette ligne quatre points communs consécutifs.

86. Application à l'hélice.

Surfaces courbes.

87. Plan tangent au conoïde de la voûte d'arête en tour ronde

$$\frac{a^2 y^2}{x^2} + z^2 = b^2.$$

88. Plan tangent à la surface des ondes

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 1.$$

89. Contour apparent du tore décrit autour de l'axe des x,

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2+z^2} - a\right)^2 = b^2,$$

a désignant la distance à l'axe du centre du cercle décrivant et b le rayon de ce cercle.

90. Équations finie et différentielle partielle des *conoïdes* engendrés par une droite qui reste horizontale en rencontrant constamment l'axe des z.

91. Équations finie et différentielle partielle des *surfaces de révolution* autour de l'axe des z considérées comme engendrées par un cercle dont le plan reste perpendiculaire à cet axe et dont le centre parcourt l'axe.

Intégration par transformation.

92. Premier principe

$$\int e^x . \operatorname{tang} e^x . dx.$$

93. $\int \frac{\cos x}{m + \sin x}\, dx.$

94. $\int \frac{Lx}{x\sqrt{m + L^2 x}}\, dx.$

95. Troisième principe

$$\int \frac{x^2}{1 + x^3}\, dx.$$

96. $\int \frac{\cos mx}{1 + \sin^2 mx}\, dx.$

97. $\int \frac{m^x}{\cos^2 (m^x)}\, dx.$

98. Quatrième principe

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

99. $\int \frac{dx}{m + \cos^2 x}.$

100. $\int \sqrt{\frac{x + m}{x + n}}\, dx.$

Intégration par décomposition.

101. Premier principe

$$\int dx \left(3x^7 - 4x^5 + \frac{3}{x^8} - \frac{7}{x^{11}} - 5\sqrt[3]{x} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^7}}\right).$$

102. $\int dx \left(m + \frac{n}{\sin x}\right)^2.$

103. Deuxième principe

$$\int \frac{x}{(x - m)^2}\, dx.$$

104. $\int \frac{x+p}{\sqrt{x^2+mx+n}}\,dx.$

105. Troisième principe

$$\int \cos mx \sin nx\,.\,dx.$$

106. $\int \frac{10x^3+3x^2-19x-6}{x^4-5x^2+4}\,dx,$ d'après (55).

107. $\int \frac{2x^3+25x^2-25x-8}{x^4-4x^3-x^2+4x}\,dx,$ d'après (56).

108. $\int \frac{4x^4-27x^3+59x^2-48x+10}{x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4}\,dx,$ d'après (57).

109. Cinquième principe

$$\int x^m e^x\,dx.$$

110. $\int x^m f(x)\,dx.$

Intégration par parties.

111. Premier principe, d'après (60, Ex. II)

$$\int \text{arc séc}\, x\,.\,dx.$$

112. Deuxième principe

$$\int \frac{x \,\text{arc sin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

113. $\int L(1+x^2)\,dx.$

114. Troisième principe

$$\int \sin^4 x\,.\,dx.$$

115. Quatrième principe

$$\int (\text{arc} \sin x)^2 \, dx.$$

116. $\int x^{m-1} (Lx)^n \, dx.$

117. Cinquième principe

$$\int \sqrt{m - x^2} \, dx.$$

118. $\int \sqrt{m + x^2} \, dx.$

119. Sixième principe. Trouver le système des intégrales

$$\int e^{mx} \cos^2 nx \, . \, dx. \quad \int e^{mx} \sin^2 nx \, . \, dx. \quad \int e^{mx} \sin nx \cos nx \, . \, dx.$$

Intégrales définies.

120. Trouver, d'après le problème (105)

$$\int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, . \, dx.$$

121. Calculer avec la simplification du § 213

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

122. Trouver, d'après la formule (82, p. 227), l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a + x^2}.$$

Différentier n fois par rapport à a.

123. Trouver l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx.$$

Intégrer par rapport à a entre les limites m et n.

124. Evaluer par la formule de Simpson avec dix intervalles l'intégrale définie

$$\int_{100}^{110} \log \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Comparer à la valeur exacte.

Applications analytiques du calcul intégral.

125. Valeur moyenne du logarithme décimal entre 1 et 10.

126. Retrouver le développement de arc tang x (20, p. 96), en effectuant celui de $\frac{1}{1+x^2}$ par la division algébrique.

127. Développer, d'après la série (221, II, p. 269)

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

128. Développer, d'après le problème (127)

$$\frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1-x^2}.$$

129. Reste de la série du sinus (11, p. 85), quand on l'arrête après le $(n-1)^{ième}$ terme.

130. Développer, par la formule de Fourier, une fonction qui soit égale à $\cos x$ entre 0 et π, et à $-\cos x$ entre 0 et $-\pi$ (1).

(1) On remarquera que les éléments de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\alpha \sin n\alpha . d\alpha$$

ne sont pas modifiés par le changement de signe de α, puisque l'on con-

Applications géométriques du calcul intégral.

131. Rectification de la parabole

$$x^2 = 2py,$$

depuis le sommet jusqu'au point qui se projette sur l'axe au foyer (Problème 118).

132. Quadrature de la chaînette

$$y = \frac{m}{2}(e^x + e^{-x}),$$

depuis le sommet jusqu'au point dont l'abscisse est m.

133. Quadrature du quart de cercle (Problème 117).

134. Quadrature de la conchoïde équilatère de Dinostrate

$$r = m\left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right),$$

entre l'axe de figure et le rayon mené à 45 degrés par le pôle (Problème 102).

135. Cubature de l'hémisphère supérieur (Problème 117).

Equations différentielles.

136. Équation homogène du premier ordre

$$(x + my)\,dx = (y + mx)\,dy.$$

137. Équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + xy = mx.$$

---

vient de changer en même temps le signe du cosinus. Ces éléments se correspondent donc deux à deux, et l'intégrale est double de celle du problème 120,

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi \sin n\varphi . d\varphi.$$

138. Equations linéaires à coefficients constants

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 5\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4.$$

139. $\frac{d^6 y}{dx^6} - 3\frac{d^5 y}{dx^5} + 6\frac{d^3 y}{dx^3} - 3\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$

140. Equations simultanées linéaires à coefficients constants

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qz + R, \quad \frac{dz}{dx} = P'y + Q'z + R'.$$

Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables.

141. Intégrer les expressions

$$du = (e^y + ye^x)\,dx + (e^x + xe^y)\,dy.$$

142. $du = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - \frac{yz}{x^2}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - \frac{xz}{y^2}\right)dy$

$$+ \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{xy}{z^2}\right)dz.$$

143. Trouver et intégrer l'équation des surfaces telles, que le plan tangent coupe toujours l'axe des z à la hauteur du point de contact.

144. Trouver et intégrer l'équation des surfaces telles, que le plan tangent soit partout perpendiculaire au plan mené par le point de contact et l'axe des z.

DEUXIÈME PARTIE.

SOLUTIONS.

---

1. $dy = \sin\left[e^{\cos(e^x)}\right].e^{\cos(e^x)}.\sin(e^x).e^x.dx.$

2. $dy = \dfrac{dx}{\operatorname{tang} 2x\sqrt{L\sin 2x}}.$

3. $dy = \dfrac{e^{\sin L\sqrt{m+x^2}}.\cos L\sqrt{m+x^2}.xdx}{m+x^2}.$

4. $dy = -m\sin^{m-1}\left(e^{n+L\cos x}\right).e^{n+L\cos x}.\operatorname{tang} x.dx.$

5. $dy = 6\log e\,\dfrac{(\log\sin 3x)^5}{\operatorname{tang} 3x\sqrt{m+(\log\sin 3x)^6}}\,dx.$

6. $dy = \dfrac{2}{3}Lm\,\dfrac{L\sin\left(\sqrt[3]{m^x}\right).\sqrt[3]{m^x}.dx}{\operatorname{tang}\left(\sqrt[3]{m^x}\right)}.$

7. $$dy = \left\{\begin{array}{l}\left[5x^4 - \dfrac{21}{8}\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}} - \dfrac{66}{x^{12}}\right]\left[3(x-2)^5 + \sqrt[3]{x^8+\dfrac{3}{x^3}}\right]\\ +\left[x^5 - 3\sqrt[8]{x^7} + \dfrac{6}{x^{11}}\right]\left[15(x-2)^4 + \dfrac{8x^7 - \dfrac{9}{x^4}}{3\sqrt[3]{\left(x^8+\dfrac{3}{x^3}\right)^2}}\right]\end{array}\right\}dx.$$

8. $$dy = \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang} mx\left[mx^{m-1}\cos(x^m) - \dfrac{\sin\left(\sqrt[m]{x}\right)}{mx^{1-\frac{1}{m}}}\right]\\ +\dfrac{m\left[\sin(x^m) + \cos\left(\sqrt[m]{x}\right)\right]}{\cos^2 mx}\end{array}\right\}dx.$$

9. $dy = \left\{ \cos 2x \,.\, \arcsin x + \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{m+x-1}{(m+x)^2} e^x \right\} dx.$

10. $dy = \cos(m^x \operatorname{tang} x + L \arcsin x) \times$
$$\left\{ m^x \left(\operatorname{tang} x \, Lm + \frac{1}{\cos^2 x} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right\} dx.$$

11. $$dy = \frac{x^{m-1}\left(m\sqrt{Lx} + \frac{1}{2\sqrt{Lx}} \right)}{\cos^2 (x^m \sqrt{Lx})} dx.$$

12. $dy = x^{\frac{\sin x}{\arcsin x}} \times$
$$\left\{ \frac{\sin x}{x \arcsin x} + Lx \left[\frac{\cos x \,.\, \arcsin x - \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} \right] \right\} dx.$$

13. $$dy = \frac{y - x^{m-1}}{y^{m-1} - x} dx.$$

14. $$dy = \frac{y \cos x - \sin y}{x \cos y - \sin x} dx.$$

15. $$dy = \frac{y\, Ly [1 + x\, Lx\, Ly - y\, Lx]}{x\, Lx [1 + y\, Ly\, Lx - x\, Ly]} dx.$$

16. $$dy = -\frac{\frac{\cos x}{z} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{e^y}{z} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} dx,$$

$$dz = \frac{\frac{e^y}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{1-y^2}}}{\frac{1}{z\sqrt{1-y^2}} + \frac{e^y}{z^2}} dx.$$

17. $du = xyz \cdot \cos(xyz) \cdot \cos(x+y+z) \cdot \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right)$
$\qquad - \sin(xyz) \cdot \sin(x+y+z) \cdot (dx + dy + dz).$

18. $du = x^{y^z} \cdot y^z \cdot \left(\frac{dx}{x} + \frac{z}{y} Lx\, dy + Lx\, Ly\, dz\right).$

19. $$du = \frac{5x^4 + uy + \frac{u}{x^2 y}}{\frac{1}{xy} - xy - 5u^4} dx + \frac{5y^4 + ux + \frac{u}{xy^2}}{\frac{1}{xy} - xy - 5u^4} dy.$$

20. $$du = \frac{\frac{e^x}{\cos^2 v} - \frac{1}{2v\sqrt{x}}}{\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{v\sqrt{1-u^2}}} dx + \frac{\frac{2y}{\cos^2 v} - \frac{\cos y}{v}}{\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{v\sqrt{1-u^2}}} dy,$$

$$dv = \frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{v\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\cos^2 v}} dx + \frac{\frac{2y}{\sqrt{1-u^2}} - \cos y}{\frac{1}{v\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\cos^2 v}} dy.$$

21. $\frac{d^n y}{dx^n} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$

22. En opérant de proche en proche, on constate la loi suivante pour les rangs pairs et impairs

$$\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} = 2^m e^x \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^{2m+1} y}{dx^{2m+1}} = 2^m e^x \left\{\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= 2^m \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

On peut donc réunir les deux formules en une seule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

On trouve de même

$$\frac{d^n z}{dx^n} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

23. $dy = -\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} dx, \quad d^2 y = (1-m)\,\frac{x^{m-2}}{y^{2m-1}}\,dx^2.$

24. $du = (3\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{E}x + \mathrm{F}y + \mathrm{H})\,dx$
$\quad + (\mathrm{B}x^2 + 2\,\mathrm{C}xy + 3\,\mathrm{D}y^2 + \mathrm{F}x + 2\,\mathrm{G}y + \mathrm{K})\,dy,$

$d^2 u = (6\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}y + 2\mathrm{E})\,dx^2 + (4\mathrm{B}x + 4\mathrm{C}y + 2\mathrm{F})\,dxdy$
$\quad + (2\mathrm{C}x + 6\mathrm{D}y + 2\mathrm{G})\,dy^2,$

$d^3 u = 6\mathrm{A}\,dx^3 + 6\mathrm{B}\,dx^2dy + 6\mathrm{C}\,dxdy^2 + 6\,\mathrm{D}\,dy^3,$

$d^4 u = 0:$

25. $du = \frac{xdx + ydy + zdz}{u},$

$$d^2 u = \frac{(y^2+z^2)dx^2 + (x^2+z^2)dy^2 + (x^2+y^2)dz^2 - 2xy.dxdy - 2xz.dxdz - 2yz\,dydz}{u^3}.$$

26. On obtient l'équation suivante, qui a été intégrée par Laplace

$$y\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{dx}{dy} - mxy = 0.$$

27. On trouve cette équation, intégrée par Poisson.

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - n\frac{dx}{dy} - \frac{m}{y^2}x = 0.$$

28. $dy = \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$

29. $dy = \frac{dx}{x.\,Lx.\,LLx}.$

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha + \frac{dy'}{dx'}\cos\alpha}{\cos\alpha - \frac{dy'}{dx'}\sin\alpha}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\left(\cos\alpha - \frac{dy'}{dx'}\sin\alpha\right)^3}.$

31. On retrouve la même expression.

32. $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left\{\frac{2^2 x^2}{1.2} - \frac{2^4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{2^6 x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots\right\}.$

33. $e^x \sin x = \sum \left\{\frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{1.2.3\ldots n} x^n\right\},$

$$e^x \cos x = \sum \left\{\frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{1.2.3\ldots n} x^n\right\}.$$

34. $x \operatorname{arc\,tang} x - L\sqrt{1+x^2} =$

$$\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} - \frac{x^8}{7.8} + \ldots$$

35. $(x+1)L(x+1) =$

$$x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^6}{5.6} - \ldots$$

36. Maxima 0 pour $x = 1$,
-54 -2,
Minima -76 -1,
-22 $+2$.

37. Maximum $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour $x = n$.

38. Maximum 10 pour $x = 1$ à la quatrième dérivée;
Minimum 9 pour $x = 2$ à la seconde dérivée.

39. Maximum ou minimum $2f(\sqrt{m})$ pour $x = \sqrt{m}$.

40. Maximum $y = \sqrt[3]{4}$ pour $x = \sqrt[3]{2}$,
Minimum $y = 0$ pour $x = 0$.

41. Le cosinus de l'angle cherché est $\frac{v}{V}$, à la condition que ce rapport soit inférieur au cosinus de l'angle que forment la droite donnée et le trajet direct. S'il est égal ou supérieur, le trajet direct constitue lui-même la solution.

42. Minimum $u = m^2 n^2$ pour $x = m$, $y = n$.

43. Minimum $u = 1$ et maximum $u = -2$ pour $x = 0$, $y = 0$.

L'équation représente en effet les deux paraboloïdes de révolution

$$u = x^2 + y^2 + 1, \quad u = -(x^2 + y^2 + 2).$$

44. Minimum $u = 3m^{\frac{2}{3}}$ pour $x = y = z = \sqrt[3]{m}$.

45. 1.

46. $2 - \frac{1}{e}$.

47. 3 (à la quatrième opération).

48. 0.

49. 0.

50. 0.

51. ∞.

52. 1.

53. 1.

54. e.

55. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2}$.

56. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{7}{x-4}$.

57. $\frac{6}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2}$.

58. Équation de la tangente

$$(2\,\mathrm{A}y + \mathrm{B}x + \mathrm{D})\mathrm{Y} + (2\,\mathrm{C}x + \mathrm{B}y + \mathrm{E})\,\mathrm{X}$$
$$+ (\mathrm{D}y + \mathrm{E}x + 2\,\mathrm{F}) = 0.$$

Équation de la normale

$$(\mathrm{B}y + 2\,\mathrm{C}x + \mathrm{E})\,\mathrm{Y} - (\mathrm{B}x + 2\,\mathrm{A}y + \mathrm{D})\,\mathrm{X}$$
$$= \mathrm{B}\,(y^2 - x^2) + 2\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,xy + \mathrm{E}y - \mathrm{D}x.$$

59. $\mathrm{T} = \dfrac{y}{b^2 x}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}, \quad \mathrm{S}_t = \dfrac{a^2 - x^2}{x},$

$\mathrm{N} = \dfrac{1}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}, \quad \mathrm{S}_n = \dfrac{b^2 x}{a^2}.$

60. $\mathrm{T} = \dfrac{\sqrt{(2px + qx^2)[(q+1)(2px+qx^2)+p^2]}}{p + qx}, \mathrm{S}_t = \dfrac{2px + qx^2}{p + qx},$

$\mathrm{N} = \sqrt{(q + 1)(2px + qx^2) + p^2}, \qquad \mathrm{S}_n = p + qx.$

61. $x = 1,\ 2,\ 3.$

62. Nœud pour $x = m,\ y = n.$

63. Rebroussement du premier genre pour $x = m,\ y = n.$

64. Rebroussement du second genre à l'origine.

65. Rebroussement vertical pour $x = m,\ y = n.$

66. Point anguleux à l'origine.

67. Point d'arrêt à l'origine.

68. Point isolé à l'origine.

69. $\operatorname{tang}\mu = \dfrac{e\cos\theta - 1}{e\sin\theta}.$

70. $\mathrm{T} = r\dfrac{\sqrt{1 + n^2}}{n}, \quad \mathrm{S}_t = \dfrac{r}{n}.$

$\mathrm{N} = r\sqrt{1 + n^2}, \quad \mathrm{S}_n = nr.$

71. $y + ax + b = 0$.

72. Une asymptote verticale $x + q = 0$, et une inclinée $y + p(x - q) + r = 0$.

73. Une asymptote verticale $x + C = 0$, et deux inclinées

$$y = \left(-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}\right)x + \frac{AC - D}{2} \mp \frac{A^2C^2 - 2BC - AD + 2E}{2\sqrt{A^2 - 4B}}.$$

74. L'axe des y est asymptote. Il en existe en outre deux autres parallèles entre elles

$$y = x \pm 1.$$

75. Si n est inférieur à l'unité, il n'y a pas d'asymptotes. Pour $n > 1$, elles passent au pôle sous tous les azimuts distincts donnés par la formule $\frac{k\pi}{n}$. Pour $n = 1$, la méthode indique une asymptote parallèle à l'axe polaire à une distance égale à l'unité; mais elle forme alors le lieu géométrique lui-même.

76. $\rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$.

77. On trouve ces points en combinant l'équation de la courbe avec la relation générale

$$3\frac{dy}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 - \left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

78. On obtient les quatre sommets d'après l'équation

$$3\frac{b^6 x}{a^4 y^3}\left\{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} - \frac{b^4}{a^2 y^2}\right\} = 0.$$

79. $\rho = \frac{r^{1-n}}{n+1}$.

80. $Y = H - \frac{X^2}{4H}$, parabole de sûreté.

81. $X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

82. $r = R \pm R'$.

83. $a^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \pm b^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$.

84. Équations de la courbe

$$y = \sin\sqrt{r^2 - x^2}, \quad z = \cos\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Tangente

$$\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}(X - x) = -\frac{Y - y}{\cos\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{Z - z}{\sin\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Plan normal

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x}(X - x) - Y\cos\sqrt{r^2 - x^2} + Z\sin\sqrt{r^2 - x^2} = 0.$$

Plan osculateur

$$x^3(X - x) - \left[r^2\sin\sqrt{r^2 - x^2} - x^2\sqrt{r^2 - x^2}\cos\sqrt{r^2 - x^2}\right]Y$$
$$-\left[r^2\cos\sqrt{r^2 - x^2} + x^2\sqrt{r^2 - x^2}\sin\sqrt{r^2 - x^2}\right]Z + r^2 = 0.$$

Rayon de courbure

$$\rho = \frac{r^3}{\sqrt{r^2 + x^4}}.$$

On trouve de même pour une ligne quelconque

$$y = \sin f(x), \quad z = \cos f(x),$$

$$\rho^2 = \frac{[1 + f'^2(x)]^3}{f'^2(x) + f'^4(x) + f'^6(x)}.$$

85 $$\alpha = x - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^3z\,dy - d^3y\,dz) - 3(dy\,d^2y + dz\,d^2z)(d^2z\,dy - dz\,d^2y)}{dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y)}$$

$$\beta = y + \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^3z - 3(dy\,d^2y + dz\,d^2z)\,d^2z}{d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y},$$

$$\gamma = z - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^3y - 3(dy\,d^2y + dz\,d^2z)\,d^2y}{d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y},$$

$$r = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}.$$

86. $\alpha = x,\ \beta = -\frac{y}{m^2},\ \gamma = -\frac{z}{m^2},\ r = \frac{1+m^2}{m^2} = \text{séc}^2 i.$

Le centre de la sphère osculatrice est donc au centre de courbure.

87. $\frac{a^2 y}{x^3}(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + z\mathrm{Z} = z^2.$

88. $$\frac{x(y^2+z^2-a^2)}{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2}(\mathrm{X}-x) + \frac{y(x^2+z^2-b^2)}{(x^2+y^2+z^2-b^2)^2}(\mathrm{Y}-y) + \frac{z(x^2+y^2-c^2)}{(x^2+y^2+z^2-c^2)^2}(\mathrm{Z}-z) = 0.$$

89. On obtient deux droites parallèles et deux cercles, mais une portion seulement de chacune de ces quatre lignes doit être conservée,

$$x = \pm b,\quad x^2 + (y \pm a)^2 = b^2.$$

90. $z = f\left(\frac{y}{x}\right),\quad x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$

91. $z = f(x^2+y^2),\quad y\left(\frac{dz}{dx}\right) = x\left(\frac{dz}{dy}\right).$

92. $-L\cos e^x + \mathrm{C},$

93. $L(m+\sin x) + \mathrm{C}.$

94. $\sqrt{m + L^2 x} + \mathrm{C}.$

95. $L\sqrt[3]{1+x^3} + \mathrm{C}.$

96. $\frac{1}{m}\,\text{arc tang}\,(\sin mx) + \mathrm{C}.$

97. $\frac{\text{tang}\,(m^x)}{Lm} + \mathrm{C}.$

98. On trouve, en posant indifféremment

$$x = \frac{1}{y},\quad \text{ou}\quad \sqrt{1-x^2} = 1 + xz,$$

$$L\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{C}.$$

99. On trouve en posant $y = \operatorname{tang} x$,

$$\frac{1}{\sqrt{m+m^2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m}{1+m}} \operatorname{tang} x\right) + C.$$

100. On trouve en posant successivement

$$\sqrt{x+m} = y \quad \text{et} \quad \sqrt{y^2+n-m} = y+z,$$

$$\sqrt{(x+m)(x+n)} + (m-n)\,L\left\{\sqrt{x+m} + \sqrt{x+n}\right\} + C.$$

101. $\dfrac{3x^8}{8} - \dfrac{2x^6}{3} - \dfrac{3}{5x^5} + \dfrac{7}{10x^{10}} - \dfrac{15\sqrt[3]{x^4}}{4} - \dfrac{15}{\sqrt[5]{x^2}} + C.$

102. $m^2 x + 2mn\,L \operatorname{tang}\dfrac{x}{2} - n^2 \cot x + C.$

103. On trouve en retranchant et ajoutant m,

$$L(x-m) - \frac{m}{x-m} + C.$$

104. On trouve en ajoutant et retranchant $\dfrac{m}{2}$,

$$\sqrt{x^2+mx+n} + \left(p - \frac{m}{2}\right) L\left\{\sqrt{x^2+mx+n} + x + \frac{m}{2}\right\} + C.$$

105. $\dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C.$

106. $L\left\{(x+1)(x-1)^2(x+2)^3(x-2)^1\right\} + C.$

107. $L\left\{\dfrac{x-1}{x^2(x+1)^4(x-4)^7}\right\} + C.$

108. $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} + 6L(x-1) - 2L(x-2) + C$

$$= \frac{x^2-2}{x^3-4x^2+5x-2} + L\left\{\frac{(x-1)^6}{(x-2)^2}\right\} + C.$$

109. $C+x^m\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{m+1}+\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{x^3}{m+3}\\ +\dfrac{1}{1.2.3}\cdot\dfrac{x^4}{m+4}+\dfrac{1}{1.2.3.4}\cdot\dfrac{x^5}{m+5}+\ldots\end{array}\right\}$

110. $C+x^m\left\{\begin{array}{l}f(0)\cdot\dfrac{x}{m+1}+\dfrac{f'(0)}{1}\cdot\dfrac{x^2}{m+2}\\ +\dfrac{f''(0)}{1.2}\cdot\dfrac{x^3}{m+3}+\dfrac{f'''(0)}{1.2.3}\cdot\dfrac{x^4}{m+4}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$

111. $x \operatorname{arc\,séc} x - L\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$

112. $x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin} x + C.$

113. $xL(1+x^2)-2x+2\operatorname{arc\,tang} x + C.$

114. On trouve, en multipliant et divisant par $\cos x$,

$$\frac{1}{4}\operatorname{tang} x\sin^4 x-\frac{1}{4}\operatorname{tang} x+\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{16}+C.$$

115. $x(\operatorname{arc\,sin} x)^2+2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin} x-2x+C.$

116. $C+\dfrac{x^m}{m}\left\{\begin{array}{l}L^n x-\dfrac{n}{m}L^{n-1}x+\dfrac{n(n-1)}{m^2}L^{n-2}x\\ -\dfrac{n(n-1)(n-2)}{m^3}L^{n-3}x+\ldots\\ \pm\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1}{m^n}\end{array}\right\}$

117. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{m-x^2}+\dfrac{m}{2}\operatorname{arc\,sin}\dfrac{x}{\sqrt{m}}+C.$

118. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{m+x^2}+\dfrac{m}{2}L\left(x+\sqrt{m+x^2}\right)+C.$

119. $\displaystyle\int e^{mx}\cos^2 nx.dx = \frac{e^{mx}}{2(m^2+4n^2)}$

$$\times\left\{\frac{m^2+4n^2}{m} + m\cos 2nx + 2n\sin 2nx\right\} + C,$$

$$\int e^{mx}\sin^2 nx.dx = \frac{e^{mx}}{2(m^2+4n^2)}$$

$$\times\left\{\frac{m^2+4n^2}{m} - m\cos 2nx - 2n\sin 2nx\right\} + C',$$

$$\int e^{mx}\sin nx\cos nx.dx = \frac{e^{mx}}{2(m^2+4n^2)}$$

$$\times\left\{m\sin 2nx - 2n\cos 2nx\right\} + C''.$$

120. L'intégrale est nulle quand n est impair, elle a pour valeur quand n est pair

$$\frac{2n}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}.$$

121 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{n-1}{n}\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots 5.3.1}{2k(2k-2)(2k-4)\ldots 6.4.2}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2k(2k-2)(2k-4)\ldots 6.4.2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\ldots 5.3.1}.$$

122. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

123. $\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}$, $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{x\,Lx}\,dx = L\frac{m}{n}$.

124. Intégrale indéfinie

$$x\log x - \frac{1}{2}(x-1)\log(x-1) - \frac{1}{2}x\log e + C.$$

Intégrale définie exacte

$$110\log 110 - \frac{1}{2}\,109\log 109 + \frac{1}{2}\,99\log 99 - 200 - 5\log e$$
$$= 10{,}1259222.$$

Valeur approchée

$$\log 101 + \log 103 + \log 105 + \log 107$$
$$+\frac{1}{3}\left\{\log 110 + \frac{7}{2}\log 109 - \left(\log 100 + \frac{1}{2}\log 99\right)\right\} = 10{,}1259209.$$

Erreur absolue en moins $= 0{,}0000013$.

Erreur relative $\doteq 0{,}0000001283 = \frac{1}{7789171}$.

125. $\log(4{,}7512\ldots) = 0{,}67681662g\ldots = \frac{10}{9} - \log e$.

126. $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

127. $1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3.4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^6}{5.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{7.8}$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^{10}}{9.10} + \ldots.$$

128. $x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{3.4.5} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^7}{5.6.7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^9}{7.8.9}$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^{11}}{9.10.11} + \ldots.$$

129. $\dfrac{x_\circ^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\theta x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

130. $\pm\dfrac{\pi}{2}\cos x=\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}\right)\sin 2x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)\sin 4x$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\sin 6x+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\sin 8x+\ldots$$

131. $\dfrac{\sqrt{2}+L(1+\sqrt{2})}{2}p=1,14836\ldots p.$

132. $\dfrac{e-\dfrac{1}{e}}{2}m=1,17520\ldots m.$

133. $\dfrac{\pi}{4}r^2=0,78539\ldots r^2.$

134. $\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{8}-L\tang(22^\circ\,30')\right\}m=1,77215\ldots m.$

135. $\dfrac{2\pi}{3}r^3=2,09439\ldots r^3.$

136. $x^2=C\dfrac{(z+1)^{m-1}}{(z-1)^{m+1}},\quad y^2-x^2=C\left(\dfrac{y+x}{y-x}\right)^m.$

137. $y=m+Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

138. $y=1+Ce^x+C'e^{-x}+C''e^{2x}+C'''e^{-2x}.$

139. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+(C_4+C_5x)e^{-x}+C_6e^{2x}.$

140. Posant pour abréger

$$S=\sqrt{(P+Q')^2+4QP'},$$

on a les intégrales

$$y = \frac{QR' - RQ'}{PQ' - QP'} + Ce^{\frac{x}{2}(Q'+P+S)} + C'e^{\frac{x}{2}(Q'+P-S)},$$

$$z = \frac{RP' - PR'}{PQ' - QP'} + \frac{Q' - P + S}{2Q}\,Ce^{\frac{x}{2}(Q'+P+S)}$$

$$+ \frac{Q' - P - S}{2Q}\,C'e^{\frac{x}{2}(Q'+P-S)}.$$

141. $u = xe^y + ye^x + C.$

142. $u = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + C.$

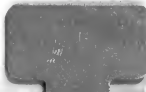
143. On retrouve les équations du problème (90).

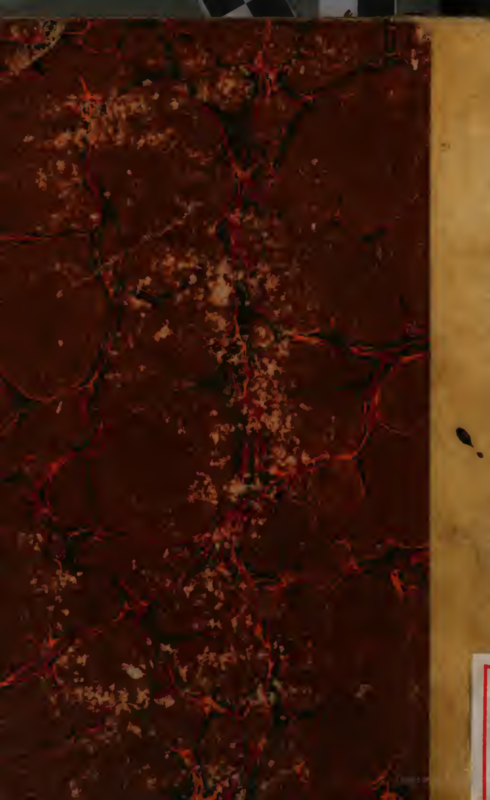
144. On retrouve les équations du problème (91).

FIN.








BIBLIOTECA